

LES EXPOSANTS ENTIERS



LES EXPOSANTS ENTIERS

- Puissance d'un nombre
- Lois des exposants
- Puissances particulières

Puissances d'un nombre

- Valeur initiale : 100 \$
- Taux d'intérêt : $5\% = \frac{5}{100} = 0,05$
- Valeur acquise au bout de n années ?

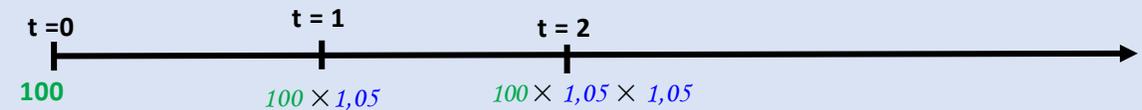


#38234014

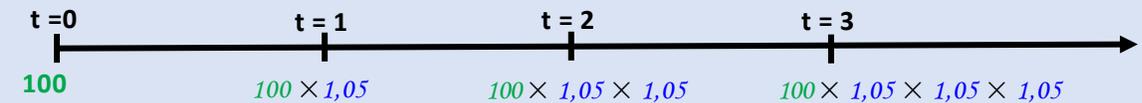
Après 1 an $100 + 0,05 \times 100 = 100 \times 1,05 = 105$



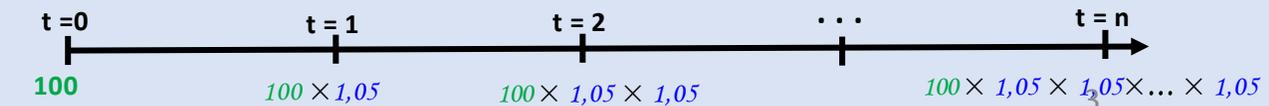
Après 2 ans $105 \times 1,05 = 100 \times 1,05 \times 1,05 = 110,25$



Après 3 ans $110,25 \times 1,05 = 100 \times 1,05 \times 1,05 \times 1,05 = 115,76$



Après n années $100 \times 1,05 \times 1,05 \times \dots \times 1,05$
avec n termes identiques égaux à $1,05$



Puissances d'un nombre

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}, n \in \mathbb{N}^*$$

a est la **base** et n l'**exposant**

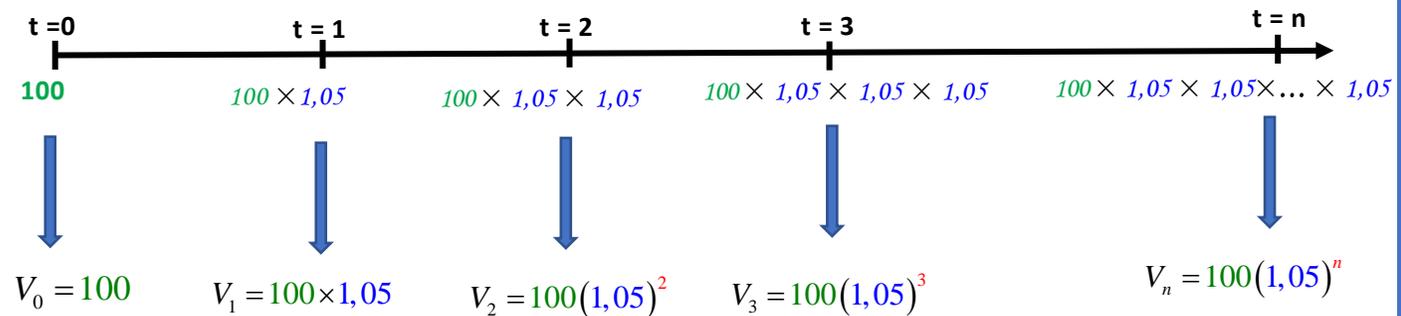
On lit : " a à la puissance n "
ou " a exposant n "

a^2 se lit " a au **carré**"

a^3 se lit " a au **cube**"

$(-5)^3$ Se lit : (-5) exposant **3** ou
 (-5) au **cube**

Se calcule : $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$



Lois des exposants: Produit et quotient de puissances de même base

$$a^n a^m = a^{n+m}, \text{ où } m, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \text{ où } a \neq 0 \text{ et } m, n \in \mathbb{N}^*$$



Mise en garde

$$a^n b^m \neq (a b)^{n+m} \text{ où } m, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad 2^4 \times 2^3 &= 2^{4+3} \\ &= 2^7 \\ &= 128 \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad \frac{2^4}{2^3} = 2^{4-3} = 2^1 = 2$$

$$\begin{array}{ccc} 2^3 \times 3^2 & \neq & (2 \times 3)^{3+2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 8 \times 9 & & 6^5 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 72 & \neq & 7776 \end{array}$$

Lois des exposants: Puissance d'un produit ou d'un quotient

$$(ab)^n = a^n b^n, \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ où } b \neq 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

- $(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$
 $= 8 \times 125$
 $= 1000$

- $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4}$
 $= \frac{81}{16}$

Lois des exposants: Puissance d'une puissance

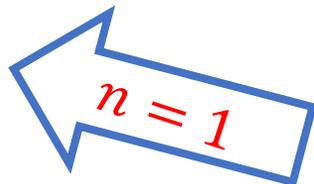
$$(a^m)^n = a^{m \times n}, \text{ où } m, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \left((-2)^3 \right)^2 &= (-2)^{3 \times 2} \\ &= (-2)^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \left(\left((-2)^3 \right)^2 \right)^4 &= \left((-2)^{3 \times 2} \right)^4 \\ &= \left((-2)^6 \right)^4 \\ &= (-2)^{6 \times 4} \\ &= (-2)^{24} \end{aligned}$$

Puissances particulières

$$a^1 = a$$



$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$a^0 = 1 \text{ si } a \neq 0$$

$$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0, \text{ si } a \neq 0$$

$$\blacksquare 5^1 = 5$$

$$(-2)^1 = -2$$

$$\blacksquare 5^0 = 1$$

$$(-2)^0 = 1$$

Puissances particulières

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}^*$$



$$a^{-n} a^n = a^0 \\ = 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \quad \text{si } a \neq 0, b \neq 0$$

$$\blacksquare \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\blacksquare \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Puissances particulières

Soit n et k deux entiers positifs

$$(a^m)^n = a^{m \times n}, \text{ où } m, n \in \mathbb{N}^*$$

$(-1)^n$

si $n = 2k$ alors $(-1)^{2k} = ((-1)^2)^k = 1^k = 1$

$$a^n a^m = a^{n+m}, \text{ où } m, n \in \mathbb{N}^*$$

si $n = 2k + 1$ alors $(-1)^{2k+1} = (-1)^{2k} (-1) = -1$

Exemple résolu: simplification d'une expression

Exemple Simplifier l'expression suivante :

$$\frac{x^3 y^4 x^2 y}{x^7 y (xy)^2}, \text{ avec } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0$$

$$\begin{aligned} \frac{x^3 y^4 x^2 y}{x^7 y (xy)^2} &= \frac{x^3 y^4 x^2 y}{x^7 y (xy)^2} = \frac{x^3 x^2 y^4 y}{x^7 y x^2 y^2} = \frac{x^{3+2} y^{4+1}}{x^7 x^2 y y^2} = \frac{x^5 y^5}{x^9 y^3} = x^{5-9} y^{5-3} \\ &= x^{-4} y^2 \\ &= \frac{1}{x^4} y^2 \\ &= \frac{1}{x^4} \frac{y^2}{1} \\ &= \frac{y^2}{x^4} \\ &= \left(\frac{y}{x^2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Résumé

Propriétés des exposants

$a, b \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \text{ où } a \neq 0$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ où } b \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1 \text{ si } a \neq 0$$

Bibliographie

- Michèle Gingras, Mathématique d'appoint, 5^e édition, 2015, Éditeur Chenelière éducation
- Josée Hamel, Mise à niveau Mathématique, 2^e édition, 2017, Éditeur Pearson (ERPI)

Quiz niveau 1

Supposons que les expressions sont toutes définies.
Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

Réponses à la page suivante

Énoncé	Réponse Vrai / Faux
$\left(\frac{1}{2x^3y^{-5}}\right)^{-1} = 2\frac{x^3}{y^5}$	
$a^4b^{-2} = \frac{a^4}{b^2}$	
$\frac{a^2b^{-3}}{a^3b^5} = \frac{a}{b^8}$	
$(2ab^3)^2 = 4a^2b^6$	
$\left(\frac{2x^2y^{-3}}{x^3y^5}\right)^{-1} = \frac{xy^8}{2}$	
$\frac{2a^2}{b^6} \times \frac{b^2}{6a^2} = \frac{3}{2b^4}$	

Quiz niveau 1

Supposons que les expressions sont toutes définies.
Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

Énoncé	Réponse Vrai / Faux
$\left(\frac{1}{2x^3y^{-5}}\right)^{-1} = 2\frac{x^3}{y^5}$	Vrai
$a^4b^{-2} = \frac{a^4}{b^2}$	Vrai
$\frac{a^2b^{-3}}{a^3b^5} = \frac{a}{b^8}$	Faux
$(2ab^3)^2 = 4a^2b^6$	Vrai
$\left(\frac{2x^2y^{-3}}{x^3y^5}\right)^{-1} = \frac{xy^8}{2}$	Vrai
$\frac{2a^2}{b^6} \times \frac{b^2}{6a^2} = \frac{3}{2b^4}$	Faux

Quiz niveau 2

Vous placez un montant V_0 dans un compte où le taux d'intérêt annuel est de i pendant t années.

V_t est le montant dans votre compte au bout de t années.

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

Énoncé	Réponses
Si $i = 10 \%$, $V_0 = 200$ \$ alors $V_3 = 200(1,1)^3$ \$	
Si $i = 10 \%$, $V_2 = 363$ \$ alors $V_0 = 300$ \$	
Si $V_0 = 200$ \$, $V_2 = 224,72$ \$ alors $i = 6 \%$	
Si $i = 7 \%$, $V_0 = 200$ \$ alors $V_3 = 200(1,7)^3$ \$	
Si $V_0 = 200$ \$, $V_3 = 636$ \$ alors $i = -6 \%$	



Réponses à la page suivante

Quiz niveau 2

Vous placez un montant V_0 dans un compte où le taux d'intérêt annuel est de i pendant t années.

V_t est le montant dans votre compte au bout de t années.

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

Énoncé	Réponses
Si $i = 10 \%$, $V_0 = 200$ \$ alors $V_3 = 200(1,1)^3$ \$	Vrai
Si $i = 10 \%$, $V_2 = 363$ \$ alors $V_0 = 300$ \$	Vrai
Si $V_0 = 200$ \$, $V_2 = 224,72$ \$ alors $i = 6 \%$	Vrai
Si $i = 7 \%$, $V_0 = 200$ \$ alors $V_3 = 200(1,7)^3$ \$	Faux
Si $V_0 = 200$ \$, $V_3 = 636$ \$ alors $i = -6 \%$	Faux