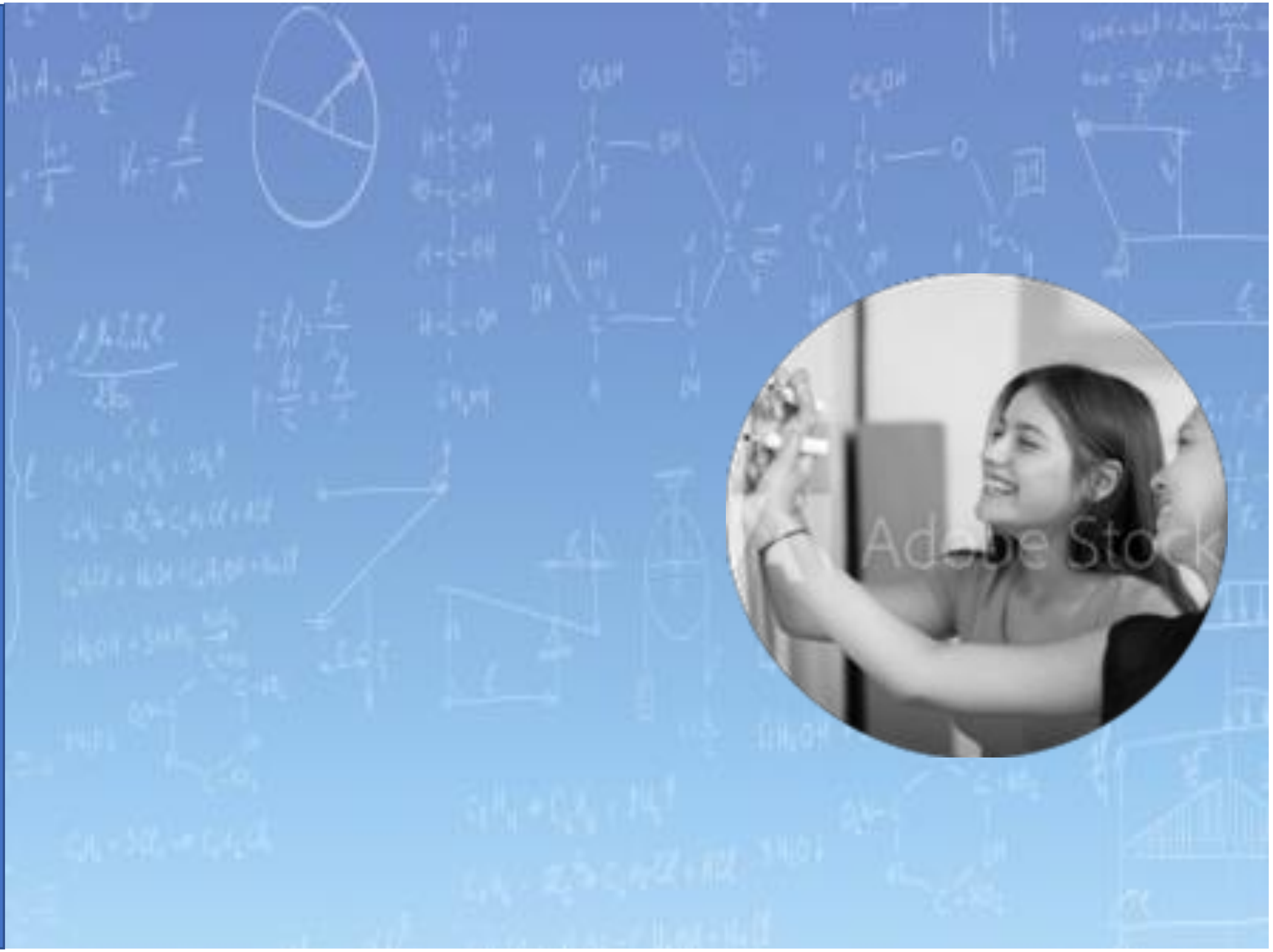
HEC MONTRÉAL

POLYNÔMES
MULTIPLICATION ET DIVISION

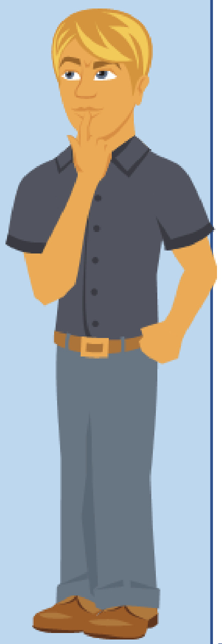


MULTIPLICATION ET DIVISION DE POLYNÔMES

- Multiplication de polynômes
- Division de polynômes

Exemple introductif

Exemple 1



- Capacité de la salle : 100 places
- Prix du billet : 15 $ s'il vend 100 billets
- Pour toute <u>augmentation</u> de 1 $ du prix du billet, il y aura une <u>diminution</u> des ventes de 2 billets.
- **Revenu = Prix du billet × Demande**

Variable (inconnue)

x : **augmentation en $ du prix du billet**

Augmentations (en $)	Prix d'un billet (en $)	Demande	Revenu
0	15	100	15×100
1	$15+1$	$100-2$	$(15+1)(100-2)$
2	$15+2$	$100-2\times 2$	$(15+2)(100-2\times 2)$
3	$15+3$	$100-3\times 2$	$(15+3)(100-3\times 2)$

$$Revenu = (15+x)(100-2x)$$

Produit de deux polynômes

Multiplication de monônes

Multiplier des monômes implique l’utilisation des règles sur les puissances.

Exemple 2 : une variable

Multiplication de x^2 et $-4x^3$

$$x^2(-4x^3) = -4x^{2+3} = -4x^5$$

Exemple 3 : plusieurs variables

Multiplication de xyz^2 et $-4x^2$

$$xyz^2(-4x^2) = -4x^{1+2}yz^2 = -4x^3yz^2$$

Multiplication d'un polynôme par un monôme

Multiplier un polynôme par un monôme implique l'utilisation des règles sur les puissances et la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Exemple 4 : monôme à une variable

Multiplication de x^2 et $2x^3 - x^2 - 3x + 4$

$$x^2(2x^3 - x^2 - 3x + 4) = 2x^{3+2} - x^{2+2} - 3x^{1+2} + 4x^2$$

$$= 2x^5 - x^4 - 3x^3 + 4x^2$$

Exemple 5 : monôme à plusieurs variables

Multiplication de xyz^2 et $2x^3 - x^2 - 3x + 4$

$$xyz^2(2x^3 - x^2 - 3x + 4) = 2x^{3+1}yz^2 - x^{2+1}yz^2 - 3x^{1+1}yz^2 + 4xyz^2$$

$$= 2x^4yz^2 - x^3yz^2 - 3x^2yz^2 + 4xyz^2$$

Multiplication de deux polynômes à une variable

Multiplier deux polynômes implique l'utilisation des règles sur les puissances et la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Exemple 6: polynômes à une variable

Multiplication de $x^2 + 2x$ et $2x^3 - x^2 - 3x + 4$

$$(x^2 + 2x)(2x^3 - x^2 - 3x + 4) = x^2(2x^3 - x^2 - 3x + 4) + 2x(2x^3 - x^2 - 3x + 4)$$

$$\begin{array}{rrrrr}
2x^5 & - x^4 & - 3x^3 & + 4x^2 & \\
 & + 4x^4 & - 2x^3 & - 6x^2 & + 8x \\
\hline
2x^5 & + 3x^4 & - 5x^3 & - 2x^2 & + 8x
\end{array}$$

Retour sur l'exemple introductif

Exemple 7

- **Revenu = Prix du billet × Demande**

Variable (inconnue)

x **: augmentation en $ du prix du billet**

$$Revenu = (15 + x)(100 - 2x)$$

Produit de deux polynômes

$$Revenu = 15 \times 100 + 15 \times (-2x) + x \times 100 + (x) \times (-2x)$$

$$= 1500 + 70\,x - 2\,x^2$$

Développement du produit des deux polynômes

Multiplication de deux polynômes à plusieurs variables

Exemple 8 : deux polynômes à deux variables ou plus

Multiplication de x^2y+3xy^2 et $2x^3y-x^2y^2-3xy$

$$(x^2y+3xy^2)(2x^3y-x^2y^2-3xy) = x^2y(2x^3y-x^2y^2-3xy)+3xy^2(2x^3y-x^2y^2-3xy)$$

$$\begin{array}{rrrrr}
2x^{5}y^2 & -\ x^{4}y^3 & & -3x^{3}y^2 & \\
 & +\ 6x^{4}y^3 & -3x^{3}y^4 & & -9x^{2}y^3 \\
\hline
2x^5y^2 & +5x^4y^3 & -3x^3y^4 & -3x^3y^2 & -9x^2y^3
\end{array}$$

Division de polynômes

Cas 1 : division de monômes

Diviser deux monômes, revient à diviser les coefficients, puis à diviser les variables semblables en soustrayant les exposants.

Exemple 9

$$4x^5 \div 24x^2 = \frac{4x^5}{24x^2},\ x \neq 0$$

$$= \frac{4}{24} \times \frac{x^5}{x^2},\ x \neq 0$$

$$= \frac{1}{6} \times x^{5-2},\ x \neq 0$$

$$= \frac{1}{6} x^3,\ x \neq 0$$

$$= \frac{x^3}{6},\ x \neq 0$$

Division de polynômes

Cas 2 : division d'un polynôme par un monôme

Diviser un polynôme par un monôme, revient à diviser chaque terme du polynôme par ce monôme.

Exemple 10

$$32x^2 - 8x + 36 \div 4x = \frac{32x^2 - 8x + 36}{4x},\ x \neq 0$$

$$= \frac{32x^2}{4x} - \frac{8x}{4x} + \frac{36}{4x}$$

$$= \frac{32}{4}x^{2-1} - \frac{8}{4}x^{1-1} + \frac{36}{4} \times \frac{1}{x}$$

$$= 8x - 2 + \frac{9}{x}$$

Division de polynômes

Cas général : quotient de polynômes

La **division** d'un polynôme P (appelé dividende) par un polynôme D (appelé diviseur et $D \neq 0$)

consiste à chercher un polynôme Q (appelé quotient) et un polynôme R (appelé reste) tels que

$$P = QD + R$$

où le polynôme R est soit nul, soit de degré inférieur au degré du polynôme D.

Le degré du polynôme P qu'on divise doit être <u>supérieur ou égal</u> au degré du polynôme diviseur D.

Division de polynômes

Exemple 11 Pour $x \neq -5$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 13x^2 + 14x + 5 & x + 5 \\ \hline -(2x^3 + 10x^2) & 2x^2 + 3x - 1 \\ \hline 3x^2 + 14x + 5 & \\ -(3x^2 + 15x) & \\ \hline -x + 5 & \\ -(-x - 5) & \\ \hline 10 & \end{array}$$

Étape 1 : écrire le dividende et le diviseur dans l'ordre décroissant de degrés de leurs termes

Étape 2 : effectuer la division de la plus grande puissance du dividende courant par celui de la plus grande puissance du diviseur

Étape 3 : multiplier le quotient par le diviseur et soustraire le résultat de ce produit du dividende

Étape 4 : refaire les étapes 2 et 3 avec le nouveau dividende, jusqu'à ce que le degré du dividende courant soit inférieur à celui du diviseur

Pour $x \neq 0$

$$\frac{2x^3 + 13x^2 + 14x + 5}{x+5} = \frac{(2x^2 + 3x - 1)(x+5) + 10}{x+5} = 2x^2 + 3x - 1 + \frac{10}{x+5}$$

$$2x^3 + 13x^2 + 14x + 5 = (x+5)(2x^2 + 3x - 1) + 10$$

Division d'un polynôme

Exemple 12 : ~~P~~pour $x \neq 3$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 \qquad - \quad 27 & x-3 \\
\hline
-(x^3-3x^2) & x^2 + 3x \quad +9 \\
\hline
3x^2 - 27 & \\
-(3x^2-9x) & \\
\hline
9x-27 & \\
-(9x-27) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Pour $x \neq 3$

$$\frac{x^3-27}{x-3} = x^2+3x+9$$

$$x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9)+0$$

Résumé

- Multiplication de polynômes: préalable multiplier des monômes.
- Multiplier l’un des polynômes par chaque monôme de l’autre polynôme
- degré$(P \times Q) =$ degré $(P) +$ degré (P)
- Aligner les termes semblables pour faciliter leur addition et obtenir le résultat final .
- Division de polynômes: similaire à la division entière de deux nombres naturels.

Bibliographie

- Michèle Gingras, Mathématique d’appoint, 5e édition, 2015, Éditeur Chenelière éducation
- Josée Hamel, Mise à niveau Mathématique, 2e édition, 2017, Éditeur Pearson (ERPI)

Quiz niveau 1

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

Énoncés
Le polynôme $(x-2)^3 = x^3 - 8$
Le degré du polynôme $(x^2-1)(x+3)$ est 3
Le produit $(2-x)(2+x)$ est égal à $4-x^2$
Le polynôme $(2-x)^2$ est égal à $4-x^2$
Le reste de la division de x^2-4x+4 par $x-2$ est le polynôme nul

Réponses à la page suivante

Quiz niveau 1

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

Énoncés	Réponses
Le polynôme $(x-2)^3 = x^3 - 8$	**Faux**
Le degré du polynôme $(x^2-1)(x+3)$ est 3	**Vrai**
Le produit $(2-x)(2+x)$ est égal à $4-x^2$	**Vrai**
Le polynôme $(2-x)^2$ est égal à $4-x^2$	**Faux**
Le reste de la division de x^2-4x+4 par $x-2$ est le polynôme nul	**Vrai**

Quiz niveau 2

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

Énoncés
La division $\frac{18x^6 - x^4 + 6x^3 - 12x + 3}{3x}$, où $x \neq 0$ donne $6x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4 + \frac{1}{x}$
Le degré du polynôme $(x^2 - 1)^3 (x + 3)$ est 7
La division $\frac{6x^6 - 3x^4 + 5x^3 - 9x + 1}{3x}$, où $x \neq 0$ donne $2x^5 - x^3 + \frac{5}{3}x^2 - 3 + \frac{1}{3x}$
Le polynôme $(4 - x)^2$ est égal à $4 - x^2$
Le reste de la division de $x^2 - 4$ par $x - 2$ est le polynôme nul

Réponses à la page suivante

Quiz niveau 2

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

Énoncés	Réponses
La division $\dfrac{18x^6 - x^4 + 6x^3 - 12x + 3}{3x}$, où $x \neq 0$ donne $6x^5 - \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4 + \dfrac{1}{x}$	Vrai
Le degré du polynôme $(x^2-1)^3(x+3)$ est 7	Vrai
La division $\dfrac{6x^6 - 3x^4 + 5x^3 - 9x + 1}{3x}$, où $x \neq 0$ donne $2x^5 - x^3 + \dfrac{5}{3}x^2 - 3 + \dfrac{1}{3x}$	Vrai
Le polynôme $(4-x)^2$ est égal à $4 - x^2$	Faux
Le reste de la division de $x^2 - 4$ par $x - 2$ est le polynôme nul	Vrai