

ÉQUATIONS LINÉAIRES À UNE VARIABLE ET INTERPRÉTATION GRAPHIQUE



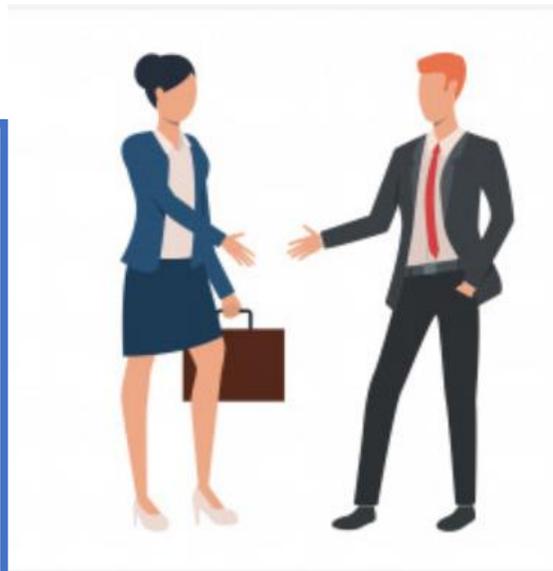
ÉQUATIONS LINÉAIRES À UNE VARIABLE ET INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

- Définition d'une équation
- Propriétés d'une équation
- Résolution d'une équation linéaire à une variable
- Interprétation graphique

Définition d'une équation

Exemple 1

Guiva
Salaire annuel : 35 000 \$
Augmentation : 700 \$/an



Messi
Salaire annuel : 40 000 \$
Augmentation : 500 \$/an

Variable (inconnue)
 x : Nombre d'années écoulées après la date d'embauche

Salaire de Guiva

Salaire de Messi

$$35\,000 + 700x = 40\,000 + 500x$$



Définition d'une équation

Équation : $\underbrace{35\,000 + 700x}_{\text{Expression A}} = \underbrace{40\,000 + 500x}_{\text{Expression B}}$ *Domaine* : $x \in [0, +\infty[$

Le domaine d'une équation est l'ensemble des valeurs qu'on peut attribuer à sa variable.

Ensemble solution : l'ensemble des valeurs de la variable (ou des variables) qui transforment l'équation en **une égalité vraie**.

On note souvent cet ensemble par S .

Résoudre une équation

Équations équivalentes : deux équations sont dites équivalentes si elles ont le même **ensemble solution**.

Définition d'une équation

$$\text{Équation : } 35\,000 + 700x = 40\,000 + 500x$$



$$x = 10: 35\,000 + 700(10) = 42\,000\$ \quad \text{et} \quad 40\,000 + 500(10) = 45\,000\$$$

$$35\,000 + 700(10) \neq 40\,000 + 500(10)$$

$$10 \notin S$$

$$x = 25: 35\,000 + 700(25) = 52\,500\$ \quad \text{et} \quad 40\,000 + 500(25) = 52\,500\$$$

$$35\,000 + 700(25) = 40\,000 + 500(25)$$



$$25 \in S$$

Propriétés d'une équation

Propriétés des équations (équations équivalentes) :

Soit A et B deux expressions mathématiques et $C \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l} \text{Si } A = B \\ \nearrow \text{ alors } A + C = B + C \\ \searrow \text{ alors } A - C = B - C \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Si } A = B \\ \nearrow \text{ alors } AC = BC, \text{ où } C \neq 0 \\ \searrow \text{ alors } \frac{A}{C} = \frac{B}{C}, \text{ où } C \neq 0 \end{array}$$

$$35\,000 + 700x - 35\,000 = 40\,000 + 500x - 35\,000$$

$$700x - 500x = 5\,000 + 500x - 500x$$

$$\frac{200}{200}x = \frac{5\,000}{200} \Rightarrow x = 25 \text{ années}$$

$$S = \{25\}$$

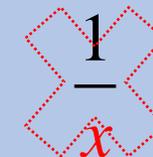
Équation du premier degré (linéaire) à une variable

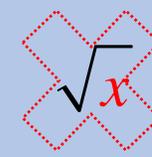
Une équation linéaire à une variable est une équation à une seule inconnue (**ou variable**) où l'exposant de cette variable est égal à 1,

On peut toujours ramener une équation linéaire à une variable, sous la forme suivante :

$$ax + b = 0 \quad \text{où } x \text{ est la variable, } a \neq 0, b \in \mathbb{R}$$

$$\text{Domaine : } \mathbb{R}$$


$$\frac{1}{x}$$


$$\sqrt{x}$$

$$35\,000 + 700x = 40\,000 + 500x \quad \Leftrightarrow 200x - 5000 = 0$$

$$-\sqrt{2}x = x + 1 \quad \Leftrightarrow (1 + \sqrt{2})x + 1 = 0$$

$$\frac{2x+1}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow 2x - 1 = 0$$

Équations **linéaires**

$$1 + \sqrt{x} = 0$$

x est sous un radical

$$\frac{x}{x+1} = x + 1$$

x est au dénominateur

$$x^2 + x + 2 = 0$$

L'exposant de x est égal à 2

Équations **non linéaires**

Équation du premier degré (linéaire) à une variable

Exemple 2 : résoudre l'équation suivante : $\frac{1}{2}(x-1) - 3 = 2(x+1)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x-1) - 3 &= 2(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1) = 2(x+1) + 3 \\ \Leftrightarrow 2 \times \frac{1}{2}(x-1) &= 2 \times [2(x+1) + 3] \\ \Leftrightarrow x - 1 &= 4(x+1) + 6 \\ \Leftrightarrow x - 1 &= 4x + 10 \\ \Leftrightarrow x &= 4x + 10 + 1 \\ \Leftrightarrow x - 4x &= 11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x-1) - 3 &= 2(x+1) \Leftrightarrow -3x = 11 \\ \Leftrightarrow \frac{-3}{-3}x &= \frac{11}{-3} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{11}{3}\end{aligned}$$

$$S = \left\{ -\frac{11}{3} \right\}$$

Important : vérification

$$\frac{1}{2}(x-1) - 3 \Big|_{x=-\frac{11}{3}} = -\frac{16}{3} \quad \text{et} \quad 2(x+1) \Big|_{x=-\frac{11}{3}} = -\frac{16}{3}$$

Approche graphique: résolution d'une équation linéaire à une variable

Exemple 3 : résoudre l'équation suivante : $x - 1 = 1 - x$

$$x - 1 = 1 - x \Leftrightarrow x - 1 + 1 = 1 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - x$$

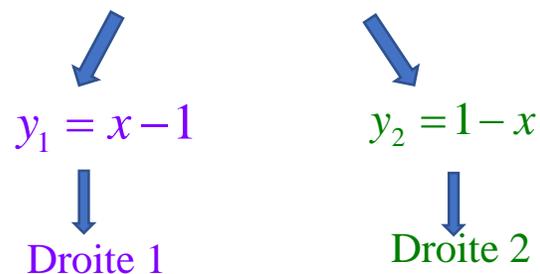
$$\Leftrightarrow x + x = 2 - x + x$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2}x = \frac{2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$S = \{1\}$$

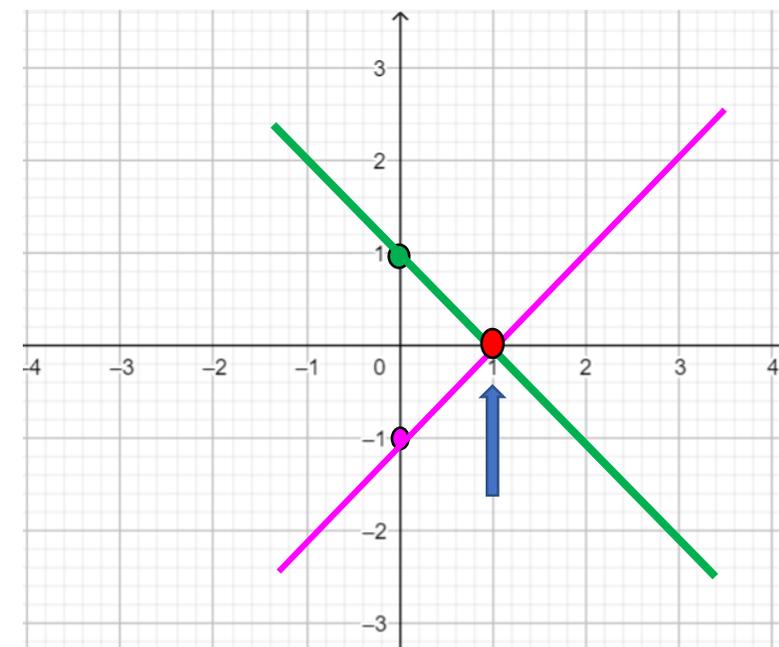


Droite 1 : $y = x - 1$

| x | $y_1 = x - 1$ |
|-----|---------------|
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |

Droite 2 : $y = 1 - x$

| x | $y_2 = 1 - x$ |
|-----|---------------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |



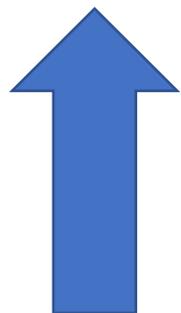
Graphiquement

Approche graphique : résolution d'une équation linéaire à une variable

Exemple 4 : résoudre l'équation suivante : $x - 1 = \frac{3x - 3}{3}$

$$x - 1 = \frac{3x - 3}{3} \Leftrightarrow 3(x - 1) = 3x - 3$$
$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

$$S = \mathbb{R}$$



$$y_1 = x - 1$$

Droite 1

$$y_2 = \frac{3x - 3}{3}$$

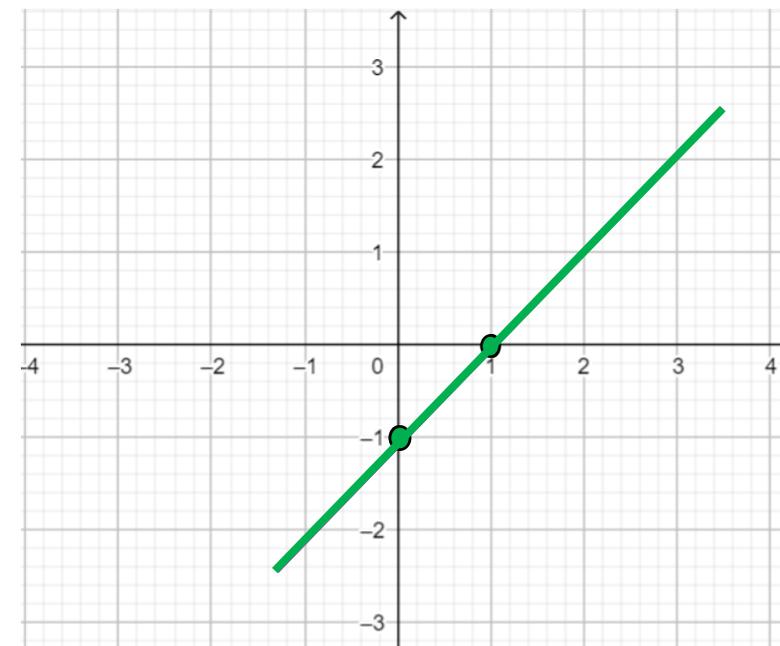
Droite 2

Droite 1 : $y = x - 1$

| x | $y_1 = x - 1$ |
|-----|---------------|
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |

Droite 2 : $y = \frac{3x - 3}{3}$

| x | $y_2 = \frac{3x - 3}{3}$ |
|-----|--------------------------|
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |



Graphiquement

Approche graphique : résolution d'une équation linéaire à une variable

Exemple 5 : résoudre l'équation suivante : $x - 1 = x + 2$

$$x - 1 = x + 2 \Leftrightarrow -1 = 2$$

$$S = \emptyset$$

L'équation n'admet aucune solution

$$y_1 = x - 1$$

Droite 1

Droite 1 : $y = x - 1$

| x | $y_1 = x - 1$ |
|-----|---------------|
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |

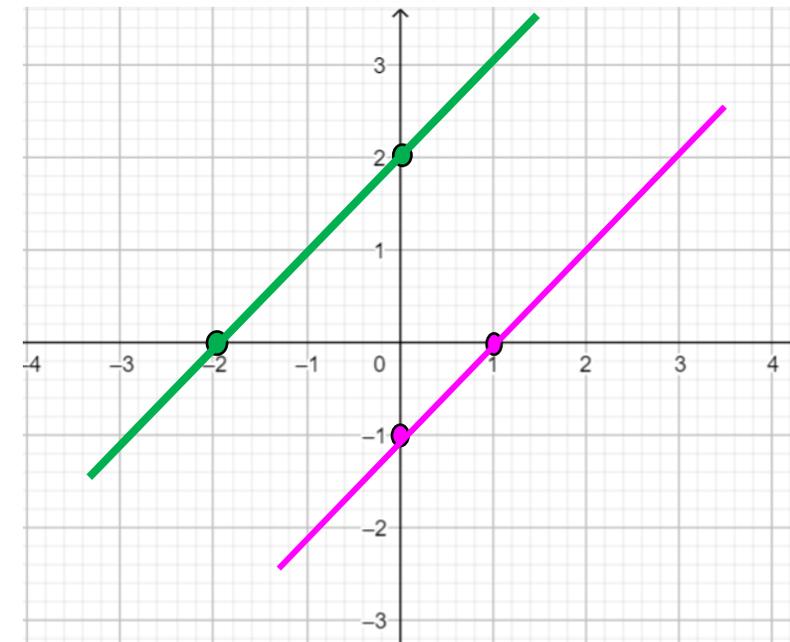
$$y_2 = x + 2$$

Droite 2

Droite 2 : $y = x + 2$

| x | $y_2 = x + 2$ |
|-----|---------------|
| 0 | 2 |
| -2 | 0 |

Graphiquement



Résumé

Résolution d'une équation linéaire à une variable

- Équation linéaire à une variable : $ax + b = 0$
- Résoudre une équation linéaire : effectuer des opérations élémentaires (+, -, ×, ÷) pour trouver la solution de l'équation.
- Une équation linéaire à une variable peut avoir :
 - Aucune solution : 2 droites parallèles et distinctes 
 - Une seule solution : 2 droites sécantes ou 
 - Une infinité de solutions : 2 droites parallèles et confondues 

Bibliographie

- Michèle Gingras, Mathématique d'appoint, 5^e édition, 2015, Éditeur Chenelière éducation
- Josée Hamel, Mise à niveau Mathématique, 2^e édition, 2017, Éditeur Pearson (ERPI)

Quiz niveau 1

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

| Énoncé |
|---|
| $2\sqrt{2}x+1 = x\sqrt{2}+1$ est une équation linéaire. |
| $5x^2 - 9 = x + 1$ est une équation linéaire |
| $\frac{2}{x} + 1 = \frac{x+1}{2}$ est une équation linéaire. |
| $\frac{2x+3}{3} = \frac{x-4}{2}$ est une équation linéaire. |
| $x = -18$ est la seule solution de $\frac{2x+3}{3} - \frac{x-4}{2} = 0$. |
| L'ensemble solution pour l'équation : $2x - 3 + 5(x+1) = 2 + 7x$ est $S = \mathbb{R}$. |

Réponses à la page suivante

Quiz niveau 1

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

| Énoncé | Vrai ou faux |
|---|--------------|
| $2\sqrt{2}x+1 = x\sqrt{2}+1$ est une équation linéaire. | Vrai |
| $5x^2 - 9 = x + 1$ est une équation linéaire | Faux |
| $\frac{2}{x} + 1 = \frac{x+1}{2}$ est une équation linéaire. | Faux |
| $\frac{2x+3}{3} = \frac{x-4}{2}$ est une équation linéaire. | Vrai |
| $x = -18$ est la seule solution de $\frac{2x+3}{3} - \frac{x-4}{2} = 0$. | Vrai |
| L'ensemble solution pour l'équation : $2x - 3 + 5(x + 1) = 2 + 7x$ est $S = \mathbb{R}$. | Vrai |

Quiz niveau 2

Le parc aquatique « **Aqua-Joie** » vous engage comme sauveteur pour l'été. Le gestionnaire vous informe que pour les 40 premières heures travaillées par semaine, vous recevez un salaire de 18 \$/h. Il vous donne une fois et demie votre salaire horaire pour toute heure supplémentaire.

Si vous souhaitez atteindre un salaire de 855 \$ (avant déduction) par semaine. Quel est le nombre d'heures supplémentaires que vous devez effectuer ?

- A. 4 heures
- B. 5 heures
- C. 8 heures



Réponses à la page suivante

Quiz niveau 2

Le parc aquatique « ***Aqua-Joie*** » vous engage comme sauveteur pour l'été. Le gestionnaire vous informe que pour les 40 premières heures travaillées par semaine, vous recevez un salaire de 18 \$/h. Il vous donne une fois et demie votre salaire horaire pour toute heure supplémentaire.

Si vous souhaitez atteindre un salaire de 855 \$ (avant déduction) par semaine. Quel est le nombre d'heures supplémentaires que vous devez effectuer ?

A. 4 heures

B. 5 heures

C. 8 heures



Quiz niveau 3 : Partie 1

Pour le travail d'été, on vous a engagé comme serveur dans Le « *Délices-Restaurant* ».

La rémunération des serveurs, dans ce restaurant, est composée de deux parties,

- une rémunération fixe de 100 \$ par soirée de service et
- une rémunération basée sur le pourboire.

Pour une soirée de service, vous estimez que chaque client consomme pour environ 70 \$.

Si le pourboire représente 15 % de la facture, donnez la formule mathématique de votre salaire pour une soirée de service en fonction de x « Nombre de clients qui donnent un pourboire lors d'une soirée donnée ».

A. $100 + 0,15x$

B. $100 + 70x$

C. $100 + 10,5x$



Réponses à la page suivante

Quiz niveau 3 : Partie 1

Pour le travail d'été, on vous a engagé comme serveur dans Le « *Délices-Restaurant* ».

La rémunération des serveurs, dans ce restaurant, est composée de deux parties,

- une rémunération fixe de 100 \$ par soirée de service et
- une rémunération basée sur le pourboire.

Pour une soirée de service, vous estimez que chaque client consomme pour environ 70 \$.

Si le pourboire représente 15 % de la facture, donnez la formule mathématique de votre salaire pour une soirée de service en fonction de x « Nombre de clients qui donnent un pourboire lors d'une soirée donnée ».

A. $100 + 0,15x$

B. $100 + 70x$

C. $100 + 10,5x$



Quiz niveau 3 : Partie 2

Pour le travail d'été, on vous a engagé comme serveur dans Le « *Délices-Restaurant* ».

La rémunération des serveurs, dans ce restaurant, est composée de deux parties,

- une rémunération fixe de 100 \$ par soirée de service et
- une rémunération basée sur le pourboire.

Pour une soirée de service, vous estimez que chaque client consomme pour environ 70 \$.

Si le pourboire représente 15 % de la facture et si pour une soirée de service, vous recevez 163 \$ (avant déduction d'impôts), combien de clients avez-vous servis ?

A. 4 clients

B. 8 clients

C. 6 clients



Réponses à la page suivante

Quiz niveau 3 : Partie 2

Pour le travail d'été, on vous a engagé comme serveur dans Le « *Délices-Restaurant* ».

La rémunération des serveurs, dans ce restaurant, est composée de deux parties,

- une rémunération fixe de 100 \$ par soirée de service et
- une rémunération basée sur le pourboire.

Pour une soirée de service, vous estimez que chaque client consomme pour environ 70 \$.

Si le pourboire représente 15 % de la facture et si pour une soirée de service, vous recevez 163 \$ (avant déduction d'impôts), combien de clients avez-vous servis ?

A. 4 clients

B. 8 clients

C. 6 clients

