Résolution d’équations quadratiques à une variable

Résolution d’équations quadratiques à une variable

Résolution d'équations quadratiques à une variable

- Définition d'une équation quadratique
- Résolution d'une équation quadratique à une variable
- Parabole et résolution d'une équation quadratique à une variable

Équation quadratique à une variable

Exemple 1

t =0 i t = 1 i t = 2

100

$$V_1 = 100(1+i)$$

$$V_2 = 100(1+i)^2$$

Le montant accumulé après deux années

À quel taux d'intérêt i avez-vous investi si vous avez accumulé 110,25 $?

Résoudre l'équation

$$\boxed{100(1+i)^2 = 110,25}$$

$100(1+i)^2$: polynôme à une variable de **degré deux**

$100(1+i)^2 = 110,25$: équation quadratique à une variable

Équation quadratique à une variable

L'équation quadratique à une variable est une équation à une seule variable, qu'on peut présenter sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où x est la variable (l'inconnue), $a \neq 0$ et $c,\ b \in \mathbb{R}$

$$100(1+i)^2 = 110,25 \quad \Leftrightarrow 100\left(i^2 + 2i + 1\right) = 110,25$$

Développement du trinôme

$$\Leftrightarrow 100i^2 + 200i + 100 = 110,25$$

Distributivité

$$\Leftrightarrow 100i^2 + 200i + 100 - 110,25 = 0$$

Soustraction de 110,25 aux deux membres

$$\Leftrightarrow 100i^2 + 200i - 10,25 = 0$$

$a = 100$

$b = 200$

$c = -10,25$

Équation quadratique à une variable

$$x^2 - 1 = 2x^2 + 2x + 1 \quad \Leftrightarrow -x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$-\sqrt{2}\,x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$$

$a = -\sqrt{2}$

$b = -\frac{1}{2}$

$c = 1$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{x^2 - 2x}{3} \quad \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0$$

Équations quadratiques

$x^2 + \sqrt{x} + 1 = 0$ — x est sous un radical

$\frac{x}{x^2+1} = x + 1$ — x est au dénominateur

$x^2 + 2x + 3 = x^2 + 3x + 5 \quad \Leftrightarrow x + 2 = 0 \quad (a = 0)$

Équations non quadratiques

Résolution d'une équation quadratique à une variable

Résolution à l'aide de la formule quadratique

Discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Soit l'équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet aucune solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet la solution réelle double : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Résolution d'une équation quadratique à une variable

Exemple 1 À quel taux d'intérêt i avez-vous investi si vous avez accumulé 110,25 \$ au bout de 2 ans ?

$$100(1+i)^2 = 110{,}25 \Leftrightarrow 100i^2 + 200i - 10{,}25 = 0$$

$a = 100$

$b = 200$

$c = -10{,}25$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 200^2 - 4(100)(-10{,}25)$$

$$\boxed{\Delta = 44100 > 0,\ \sqrt{\Delta} = 210}$$

$$i_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-200 - \sqrt{44100}}{2(100)}$$

$$i_1 = -2{,}05$$

À rejeter

et

$$i_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-200 + \sqrt{4410}}{2(100)}$$

$$i_2 = 0{,}05$$

Le taux d'intérêt composé sur votre placement est i = 5%

$$S = \{0{,}05\}$$

Résolution d'une équation quadratique à une variable

Résolution par application d'une racine carrée

Exemple 1 À quel taux d'intérêt i avez-vous investi si vous avez accumulé 110,25 \$ après deux années?

$$100(1+i)^2 = 110,25 \quad \Leftrightarrow (1+i)^2 = \frac{110,25}{100}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1+i)^2} = \sqrt{\frac{110,25}{100}}$$

$$\Leftrightarrow |1+i| = 1,05$$

$$\Leftrightarrow 1+i = \pm 1,05$$

Rappel : Propriétés des radicaux

$$x^2 = A \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{A},\ \text{où } A \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{A}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{A}$$

$$i_1 = -1,05 - 1 = -2,05$$

À rejeter

$$i_2 = 1,05 - 1 = 0,05$$

Le taux d'intérêt composé sur votre placement est i = 5%

$$S = \{0,05\}$$

Résolution d'une équation quadratique à une variable

Résolution par application d'une racine carrée

Exemple 2 Résoudre l'équation suivante : $x^2 + 4 = 0$

$$x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$$

Contradiction, car $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0$

$$S = \varnothing$$

Vérification par la formule quadratique

$$x^2 + 4 = 0$$

$a = 1$

$b = 0$

$c = 4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -16 < 0$$

$x^2 + B^2 = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Résolution d'une équation quadratique à une variable

Résolution par Factorisation (différence de carrés)

Exemple 3 Résoudre l'équation suivante : $(x-1)^2-9=0$

$$\underbrace{(x-1)^2-9}_{A^2 \; - \; B^2}=0 \quad \Leftrightarrow \left[\underbrace{(x-1)}_{A}-\underbrace{3}_{B}\right]\left[\underbrace{(x-1)}_{A}+\underbrace{3}_{B}\right]=0$$

Rappel :différence de carré

$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x+2)=0$$

Rappel : produit nul

$AB=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ ou } B=0$

$$\Leftrightarrow \; x-4=0 \; (\text{ce qui correspond à } x=4)$$

$$\text{ou } x+2=0 \; (\text{ce qui correspond à } x=-2).$$

$S=\{-2,4\}$

Résolution d'une équation quadratique à une variable

Résolution par **Factorisation**

Exemple 4 Résoudre l'équation suivante : $8x^2+4x=0$

$$8x^2+4x=0 \Leftrightarrow 4x(2x+1)=0$$

Rappel Mise en évidence simple

$$ab+ac=a(b+c)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x=0 \ (\text{ce qui correspond à } x=0)$$

$$\text{ou } 2x+1=0 \left(\text{ce qui correspond à } x=-\frac{1}{2}\right).$$

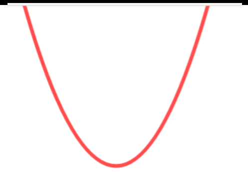
Rappel Produit nul

$$AB=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ ou } B=0$$

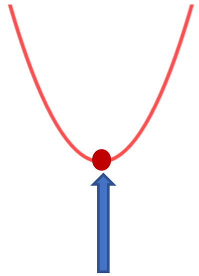
$$\boxed{S=\left\{-\frac{1}{2},0\right\}}$$

Parabole : résolution d’une équation quadratique à une variable

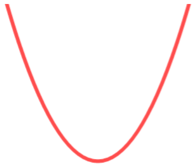
La représentation graphique de $y = {\color{blue}a}x^2 + {\color{magenta}b}x + {\color{green}c}$ ← Parabole



- Le sommet de la parabole : $x_S = -\frac{b}{2a}$ et $y_s = a x_s^2 + b x_s + c$

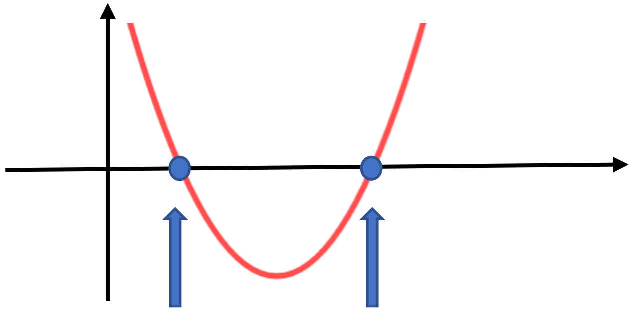


- Si $a > 0$



Si $a < 0$

- Résoudre l’équation $ax^2 + bx + c = 0$



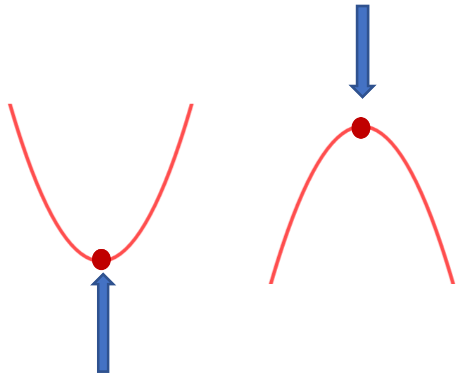
Parabole : résolution d’une équation quadratique à une variable

Exemple 5 $y = x^2 + 4$

$a = 1$

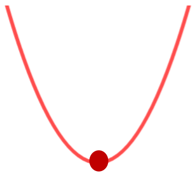
$b = 0$

$c = 4$



- Le sommet de la parabole : $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2} = 0$ et $y_s = 0^2 + 4 = 4$

- $a = 1 > 0$



- $\Delta = -16 < 0$, l’équation $x^2 + 4 = 0$ n’admet aucune solution

La parabole ne coupe pas l’axe des x.

Parabole : résolution d'une équation quadratique à une variable

Suite exemple 5 $y = x^2 + 4, \quad \Delta < 0$

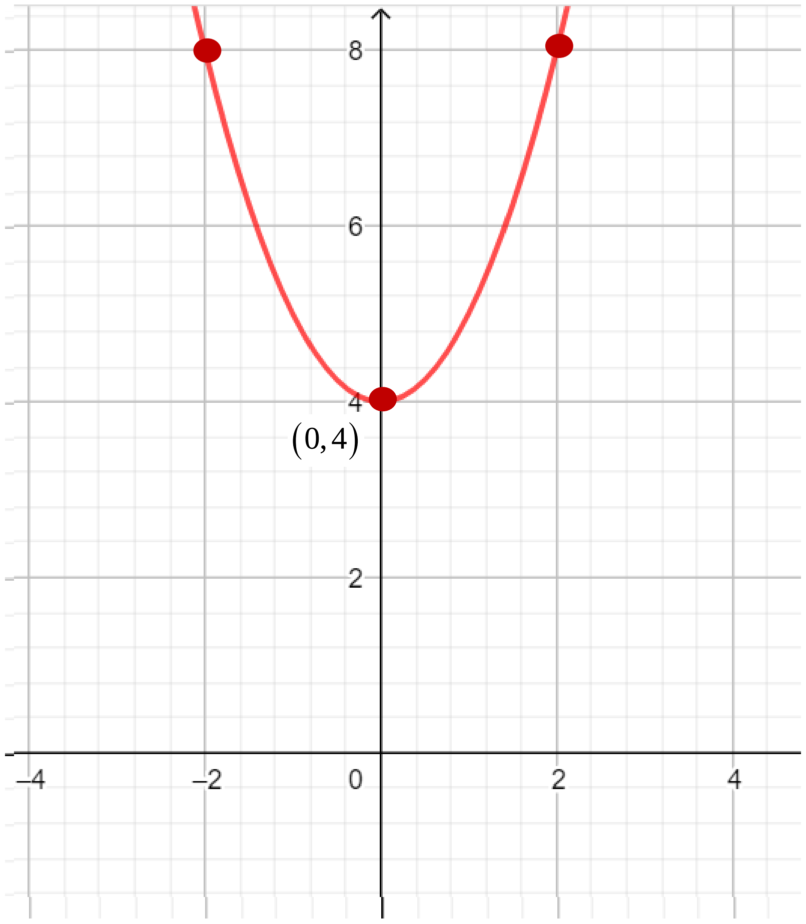
- Le sommet de la parabole : $x_S = 0$ et $y_s = 4$

- La parabole ne coupe pas l'axe des x.

- Trouver deux autres points de la parabole :

x	$y_1 = x^2 + 4$
-2	8
2	8

- $a = 1 > 0$



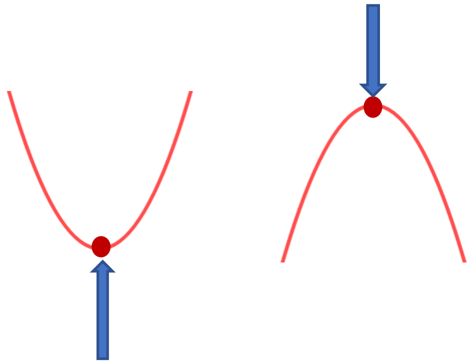
Parabole : résolution d'une équation quadratique à une variable

Exemple 6 $y = -x^2 + 2x - 1$

$a = -1$

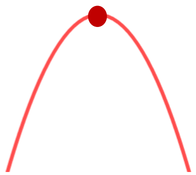
$b = 2$

$c = -1$



- Le sommet de la parabole : $x_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{-2} = 1$ et $y_s = -1^2 + 2(1) - 1 = 0$

- $a = -1 < 0$



- $\Delta = 0$, l'équation $-x^2 + 2x - 1 = 0$ admet la solution unique $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = 1$

La parabole touche, sans la couper, ~~coupe~~ l'axe des abscisses en $x = 1$.

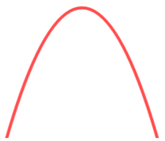
Parabole : résolution d'une équation quadratique à une variable

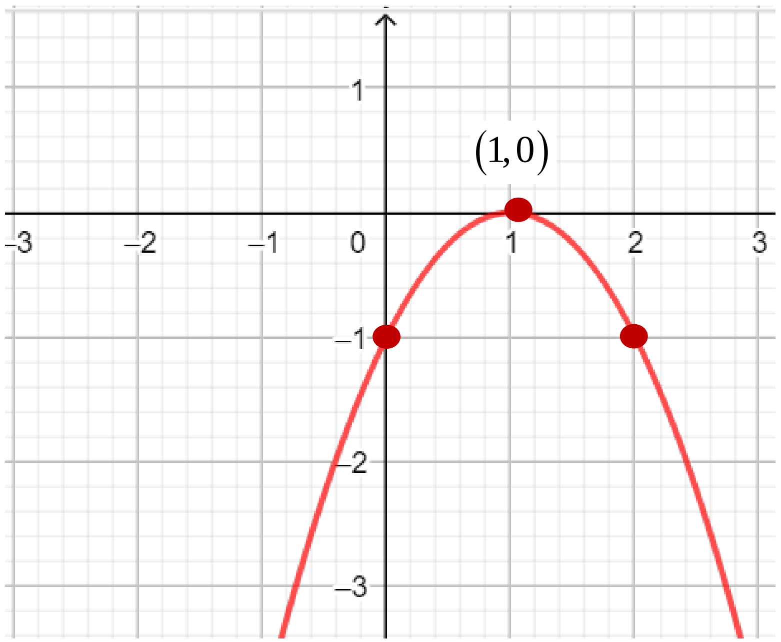
Suite exemple 6 : $y = -x^2 + 2x - 1, \quad \Delta = 0$

- Le sommet de la parabole : $x_s = 1$ et $y_s = 0$
- La parabole touche l'axe des x en un seul point (au sommet).
- Trouver deux autres points de la parabole :

x	$y_1 = -x^2 + 2x - 1$
0	-1
2	-1

- $a = -1 < 0$





Parabole : résolution d'une équation quadratique à une variable

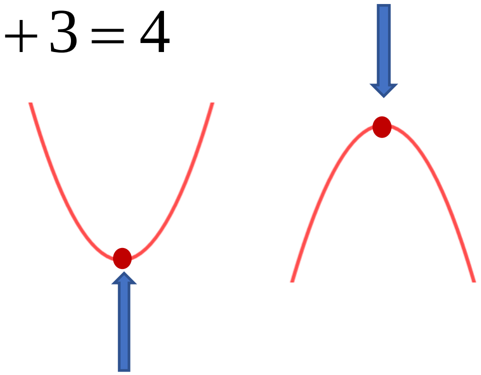
Exemple 7 $y=-x^2-2x+3$

$a=-1$

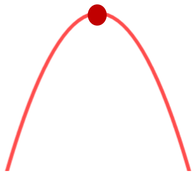
$b=-2$

$c=3$

- Le sommet de la parabole : $x_s=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{-2}=-1$ et $y_s=-(-1)^2-2(-1)+3=4$



- $a=-1<0$



- $\Delta=16>0$, l'équation $-x^2-2x+3=0$ admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=3 \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=1$$

$\Updownarrow$

La parabole coupe l'axe des x en ces points : $(3,0)$ et $(1,0)$

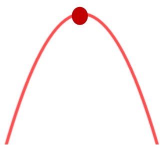
Parabole : résolution d'une équation quadratique à une variable

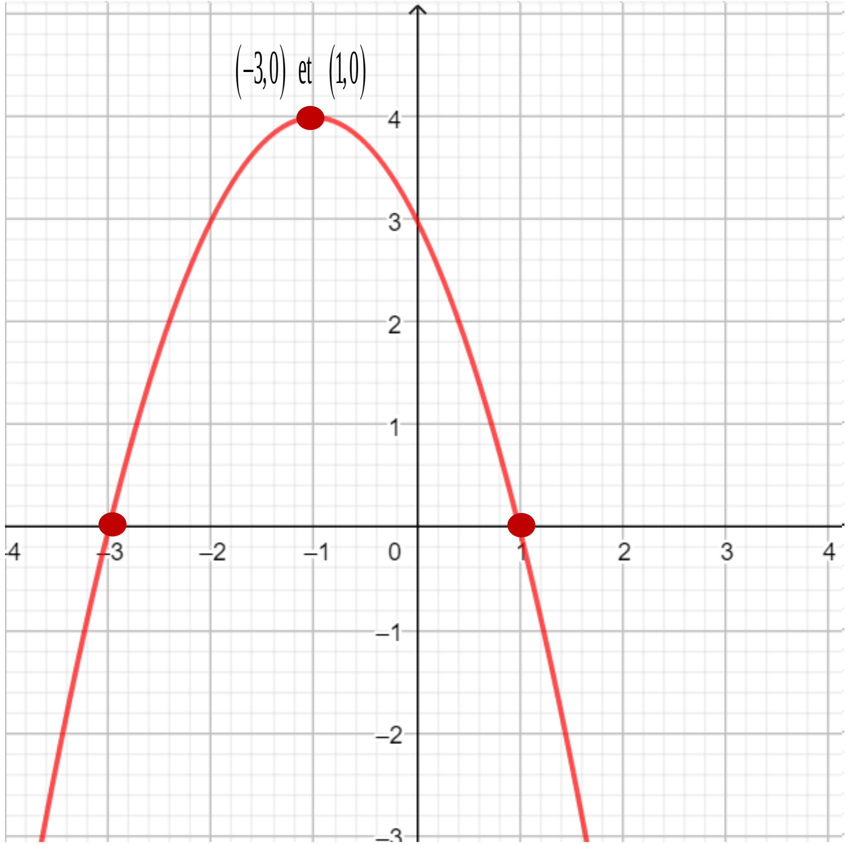
Suite exemple 7 $y=-x^2-2x+3,\ \Delta>0$

- Le sommet de la parabole : $x_S=-1$ et $y_s=4$

- La parabole coupe l'axe des x en deux points : $(-3,0)$ et $(1,0)$
.

- $a=-1<0$





Résumé

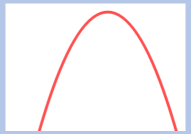
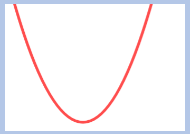
Équation quadratique à une variable

$$x^2 + B^2 = 0$$

$$S = \varnothing$$

- Équation quadratique à une variable : $ax^2 + bx + c = 0$
- Techniques de résolution d'une équation quadratique
  - Résolution par la **formule quadratique :** $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\boxed{x^2 - 9 = 0}$
  - Résolution par application de **la racine carrée** : $A^2 = B \Leftrightarrow A = \pm\sqrt{B}$, où $B \geq 0$ $\boxed{x^2 - 9 = 0}$
  - Résolution par **factorisation** $\boxed{x^2 - 9 = 0}$

Résumé

- Le graphe de $y = ax^2 + bx + c$ est une parabole
- Le sommet de la parabole : $x_S = -\dfrac{b}{2a}$ et $y_s = ax_S{}^2 + bx_S + c$
- Si $a < 0$, alors la parabole est ouverte vers le bas 
- Si $a > 0$, alors la parabole est ouverte vers le haut 
- Si $\Delta < 0$, alors la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses
- Si $\Delta = 0$, alors la parabole touche, sans la couper, l'axe des abscisses à son sommet
- Si $\Delta > 0$, alors la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points

Bibliographie

- Michèle Gingras, Mathématique d’appoint, 5e édition, 2015, Éditeur Chenelière éducation
- Josée Hamel, Mise à niveau Mathématique, 2e édition, 2017, Éditeur Pearson (ERPI)

Quiz niveau 1

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

Énoncé
$a)$ L'ensemble solution de l'équation $16x^2+25=0$ est $S=\left\{-\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right\}$
$b)$ L'ensemble solution de l'équation $16x^2-25=0$ est $S=\left\{-\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right\}$
$c)$ L'ensemble solution de l'équation $(1-x)^2-(2-x)^2=0$ est $S=\varnothing$
$d)$ L'ensemble solution de l'équation $(1-x)^2+(2-x)^2=0$ est $S=\varnothing$
$e)$ L'ensemble solution de l'équation $4x^2-4x+1=0=0$ est $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$
$f)$ L'ensemble solution de l'équation $2x^2-5=0$ est $S=\left\{-\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$

Réponses à la page suivante

Quiz niveau 1

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

Énoncé	Réponse
$a)$ L'ensemble solution de l'équation $16x^2+25=0$ est $S=\left\{-\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right\}$	**Faux**
$b)$ L'ensemble solution de l'équation $16x^2-25=0$ est $S=\left\{-\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right\}$	**Vrai**
$c)$ L'ensemble solution de l'équation $(1-x)^2-(2-x)^2=0$ est $S=\varnothing$	**Faux**
$d)$ L'ensemble solution de l'équation $(1-x)^2+(2-x)^2=0$ est $S=\varnothing$	**Vrai**
$e)$ L'ensemble solution de l'équation $4x^2-4x+1=0=0$ est $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$	**Vrai**
$f)$ L'ensemble solution de l'équation $2x^2-5=0$ est $S=\left\{-\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$	**Vrai**

Quiz niveau 2

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

Énoncé
a) La parabole d'équation $y = x^2 + x - 2$ coupe l'axe des abscisses en $x = 1$ et $x = -2$
b) La parabole d'équation $y = x^2 + 2$ coupe l'axe des abscisses en $x = -\sqrt{2}$ et $x = \sqrt{2}$
c) La parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{4} + x + 4$ coupe l'axe des abscisses en $x = -2$
d) La parabole d'équation $y = 4 - x^2$ est ouverte vers le bas.
e) La parabole d'équation $y = -4 + 2x + 2x^2$ est ouverte vers le haut.

Réponses à la page suivante

Quiz niveau 2

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

Énoncé	Réponse
$a)$ La parabole d'équation $y = x^2 + x - 2$ coupe l'axe des abscisses en $x = 1$ et $x = -2$	**Vrai**
$b)$ La parabole d'équation $y = x^2 + 2$ coupe l'axe des abscisses en $x = -\sqrt{2}$ et $x = \sqrt{2}$	**Faux**
$c)$ La parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{4} + x + 4$ coupe l'axe des abscisses en $x = -2$	**Faux**
$d)$ La parabole d'équation $y = 4 - x^2$ est ouverte vers le bas.	**Vrai**
$e)$ La parabole d'équation $y = -4 + 2x + 2x^2$ est ouverte vers le haut.	**Vrai**

Quiz niveau 3

Pour permettre aux étudiants de l’année préparatoire de profiter du temps des fêtes, Messi, un ancien étudiant de HEC, aimerait organiser un spectacle dans une salle qui comporte au maximum 100 places. Messi a établi que si le billet coûte 15 $, la salle sera comble et que pour toute augmentation de 3 $ du prix du billet, il y aura une diminution des ventes de 4 billets.
Notons x le nombre d’augmentations de 3 dollars du prix initial d’un billet.

Déterminez à quel prix, Messi devrait vendre les billets pour que le revenu de sa vente atteigne 2700 $.

A. 45 $

B. 10 $

C. 35 $

Réponses à la page suivante

Quiz niveau 3

Pour permettre aux étudiants de l'année préparatoire de profiter du temps des fêtes, Messi, un ancien étudiant de HEC, aimerait organiser un spectacle dans une salle qui comporte au maximum 100 places. Messi a établi que si le billet coûte 15 $, la salle sera comble et que pour toute augmentation de 3 $ du prix du billet, il y aura une diminution des ventes de 4 billets.
Notons x le nombre d'augmentations de 3 dollars du prix initial d'un billet.

Déterminez à quel prix, Messi devrait vendre les billets pour que le revenu de sa vente atteigne 2700 $.

A. **45 $**

B. **10 $**

C. **35 $**