HEC MONTRÉAL

FONCTIONS EXPONENTIELLES

FONCTIONS EXPONENTIELLES

- Définition et propriétés
- Propriétés graphiques
- Équations exponentielles

Définition et propriétés

Définition Une fonction exponentielle de base a, où $a \in]0,+\infty[$ et $a \neq 1$ exprimée sous sa forme la plus simple, est une fonction de la forme :

$$f(x) = a^x, \text{ où } x \in \mathbb{R}$$

Expression de f(x)	Est-ce une fonction exponentielle?	Si oui, que vaut la base a/ Sinon, pourquoi
$f(x) = 2^x$	oui	$a = 2$
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	oui	$a = \frac{1}{2}$
$f(x) = (0.75)^x$	oui	$a = 0.75$
$f(x) = (-3)^x$	non	Parce que -3 est négatif
$f(x) = x^5$	non	f est plutôt une fonction polynômiale

Définition et propriétés: Pourquoi a >0?

Justification par un exemple de la condition $a > 0$

- La variable x peut être n'importe quel nombre réel. En particulier, si x est un nombre rationnel,

$\Rightarrow$ la définition d'un exposant rationnel (voir atelier sur les exposants rationnels) nous rappelle que si le dénominateur de ce nombre rationnel est pair et que la base b est négative, la puissance rationnelle ne peut être définie.

a^x est définie pour tout nombre rationnel $\Rightarrow$ $a > 0$

- Imposer $a \neq 1$ assure de ne pas avoir une fonction constante.

Définition et propriétés

Une propriété très utile pour les calculs sur les fonctions exponentielles:

$$a^{x+y} = a^x\, a^y \ ,\ a \in \left]0,+\infty\right[,\ a \neq 1 \text{ et } x, y \in \mathbb{R}$$

Rappel des propriétés Soit les nombres $a,\ b \in \left]0,+\infty\right[,\ a \neq 1,\ b \neq 1$ et $x, y \in \mathbb{R}$

$a^{x+y} = a^x\, a^y$	$a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$	$a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$
$(ab)^x = a^x\, b^x$	$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$	$a^0 = 1$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$		

Définition et propriétés

Exemple : Utilisation de la fonction exponentielle $\boldsymbol{Q(t) = Q_o a^{Kt}}$

- La croissance ou la décroissance d'une population
- La croissance d'un investissement
- La dépréciation d'une voiture

Q_o	Quantité initiale
a	Constante sans unité; représente le facteur de **croissance** (***a > 1***) ou de **décroissance** (***0 < a < 1***), la base de la fonction exponentielle.
K	Constante exprimée en unités inverses du temps (« mois^{-1} », « année^{-1} », etc); représente l'inverse du temps nécessaire pour que la quantité soit multipliée par un facteur a .
t	variable indépendante (temps en mois, année, etc.).

Définition et propriétés

Exemple : La fonction $V(t) = 100(1 + 5\%)^t$, donne la valeur d'un capital placé pendant *t* années à un taux d'intérêt composé annuellement de 5 %.

t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = n
100	$100 \times 1{,}05$	$100 \times 1{,}05 \times 1{,}05$	$100 \times 1{,}05 \times 1{,}05 \times 1{,}05$	$100 \times 1{,}05 \times 1{,}05 \times \ldots \times 1{,}05$

Constante ou variable	Interprétation
100	Le capital initial est de 100 $
1,05	***a*** **= (1 + 0.05) = 1.05 > 1, il s'agit d'un facteur de croissance**
t	Temps en année
k	k = 1 en années^{-1}
$(1{,}05)^t$	Le capital est multiplié par 1.05 chaque année (*a = 1.05*)

Propriétés graphiques

$f(x) = a^x$, $a > 0$ et $a \neq 1$: fonction exponentielle de base a

$Dom(f) = \mathbb{R}$

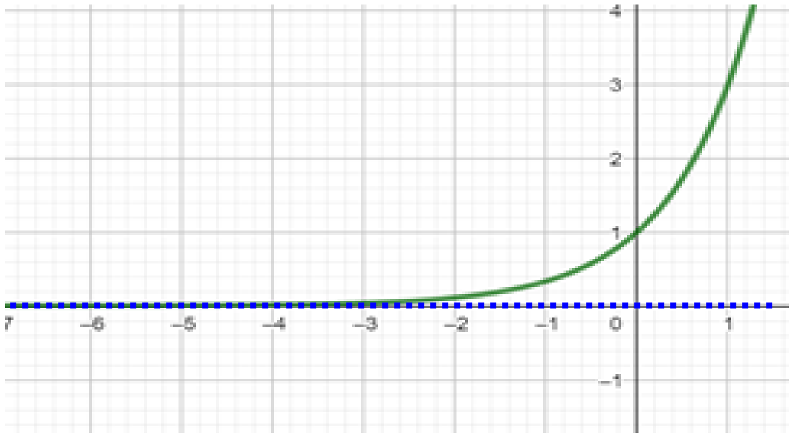
$\mathrm{Im}(f) =]0, +\infty[$

Pas d'intersection du graphe de f avec l'axe des abscisses

L'ordonnée à l'origine : $y = f(0) = 1$

Asymptote horizontale : Une droite d'équation $y = k$ est asymptote horizontale à la courbe d'une fonction f si, pour x de plus en plus grand ou x de plus en plus petit, les valeurs des ordonnées de $y = f(x)$ se rapprochent d'un côté de cette droite.

$y = 0$: asymptote horizontale

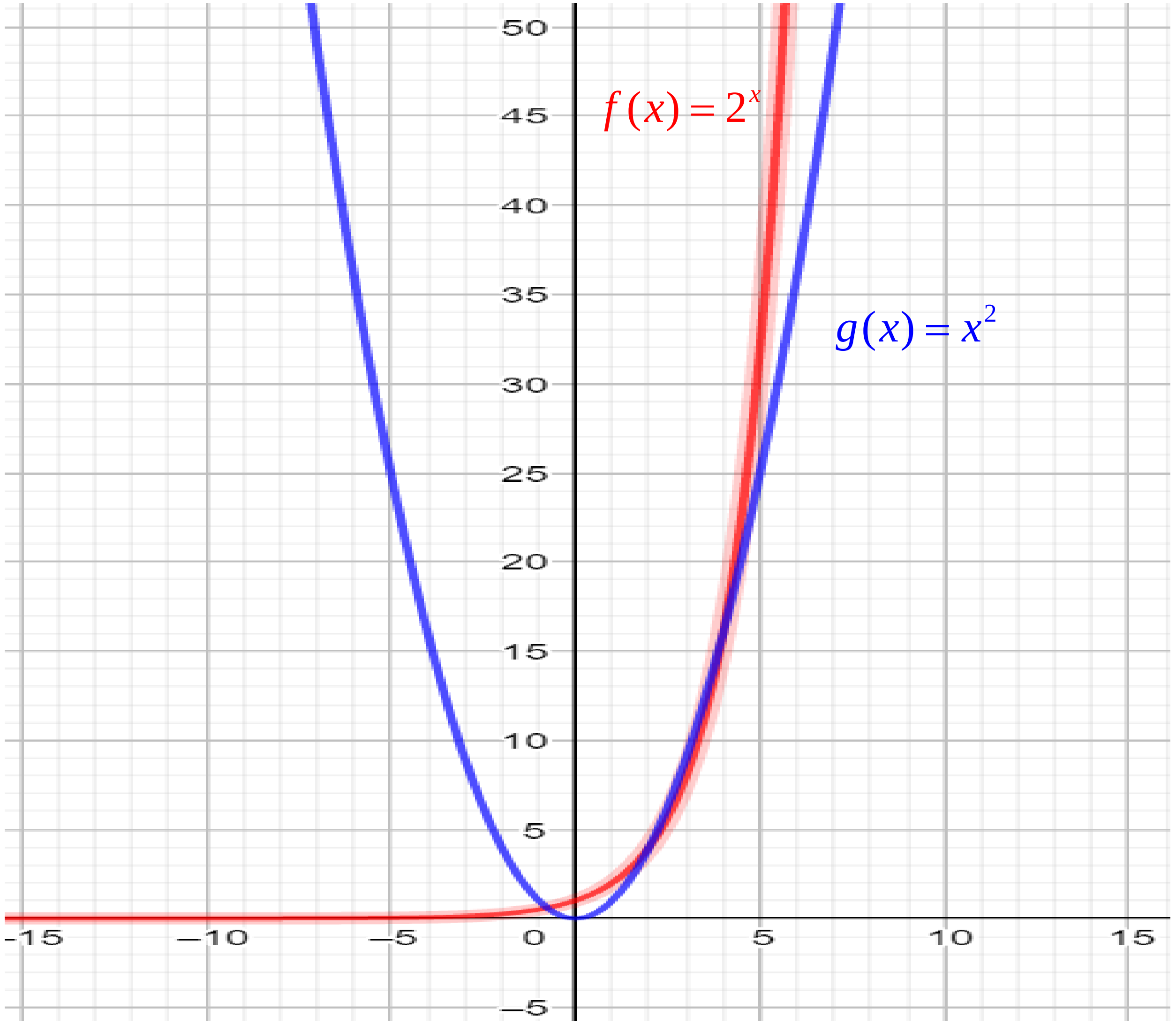


Propriétés graphiques

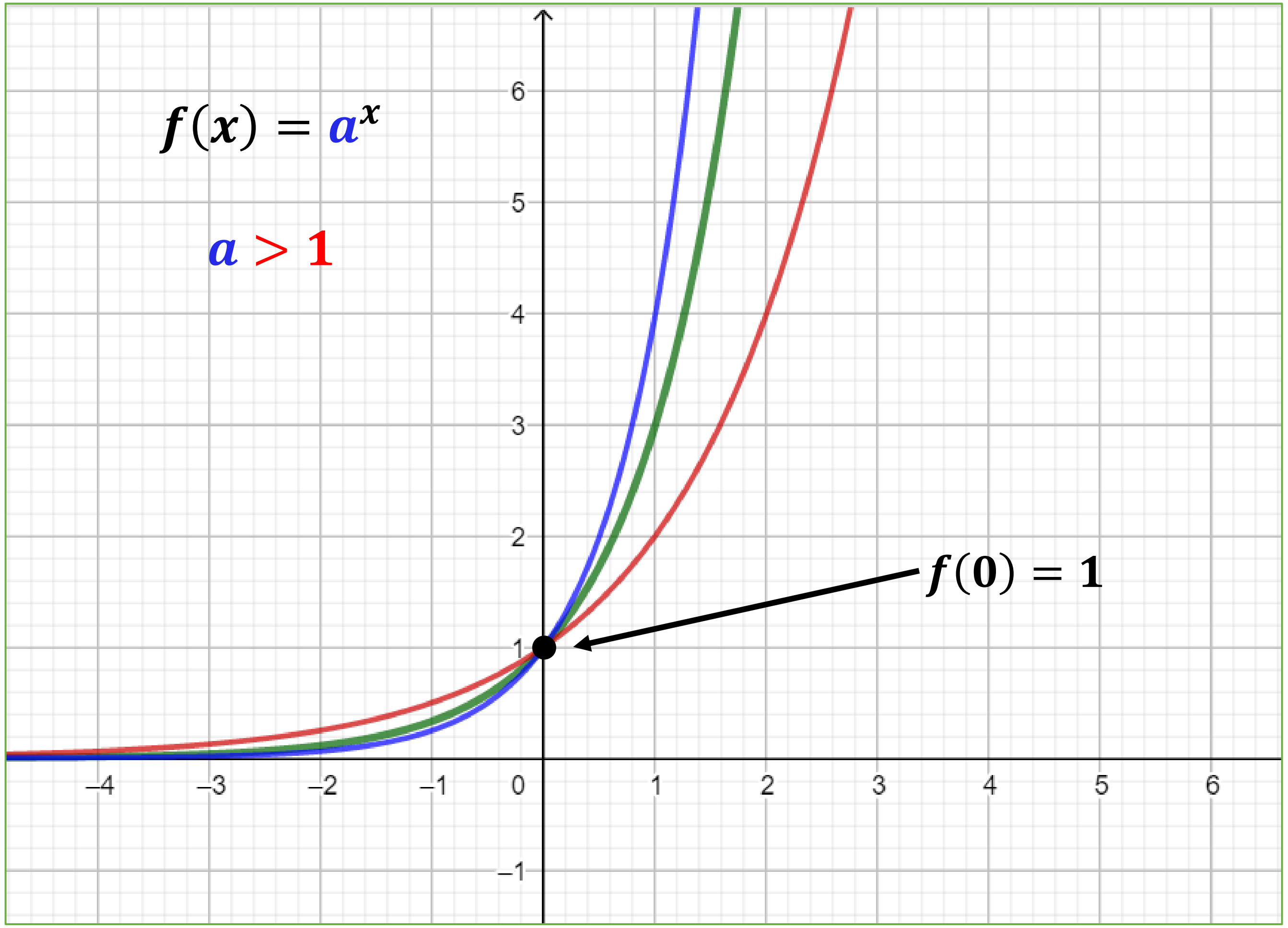
Branche parabolique de direction verticale :

pour x de plus en plus grand ou x de plus en plus petit, la courbe «regarde» dans la direction verticale comme les branches d'une parabole.

La branche parabolique d'une fonction exponentielle de base $a > 1$ finit par passer au dessus de celle de toute fonction polynomiale.

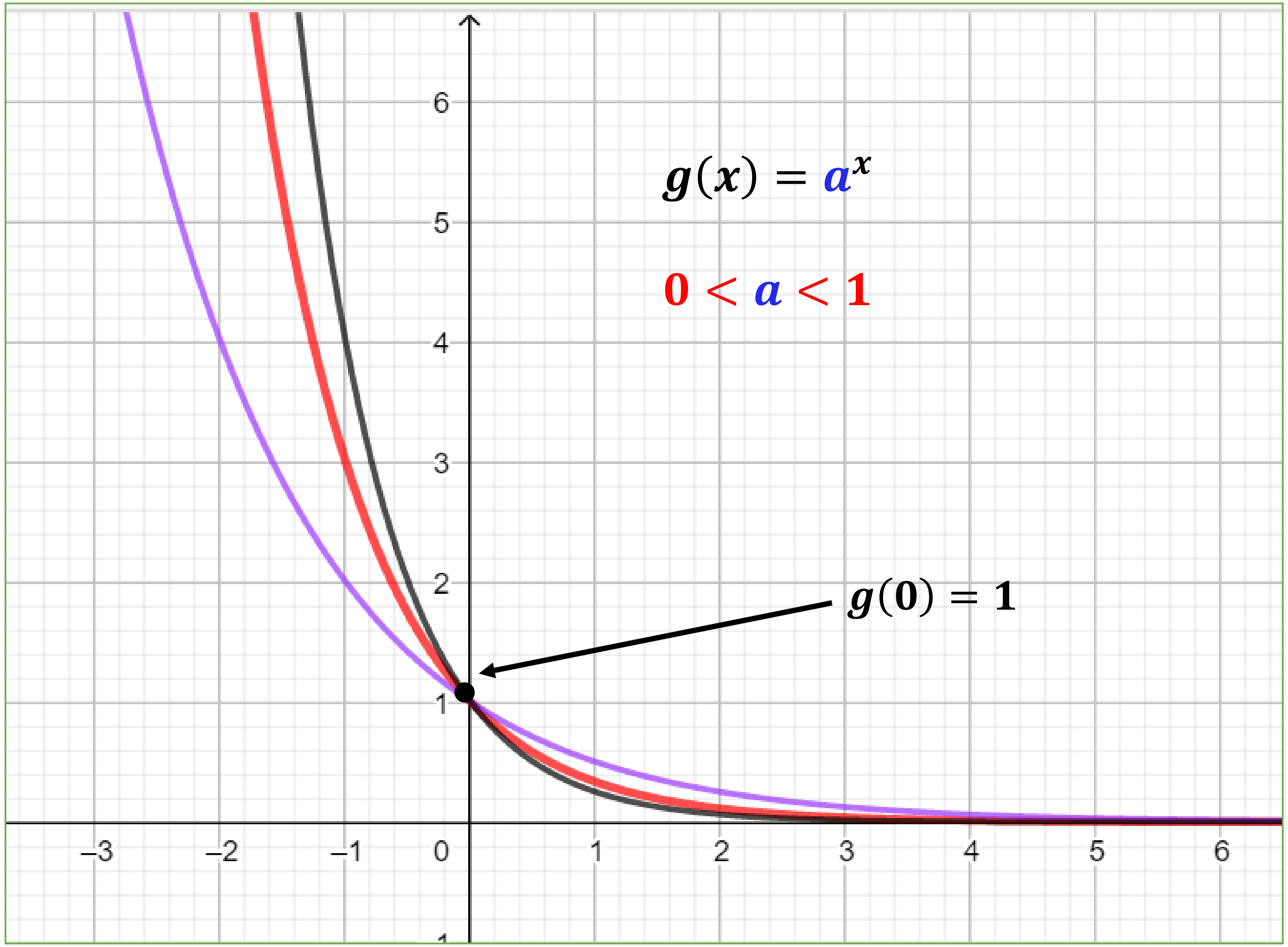


Propriétés graphiques



$f(x) = a^x$ $a > 1$	
$Dom(f)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(f)$	$]0,+\infty[$
$f(0)$	1
$f(x)=0$	$S=\varnothing$
Asymptote	$y=0$, active à gauche
Branche parabolique	Direction verticale, dans le 1er quadrant

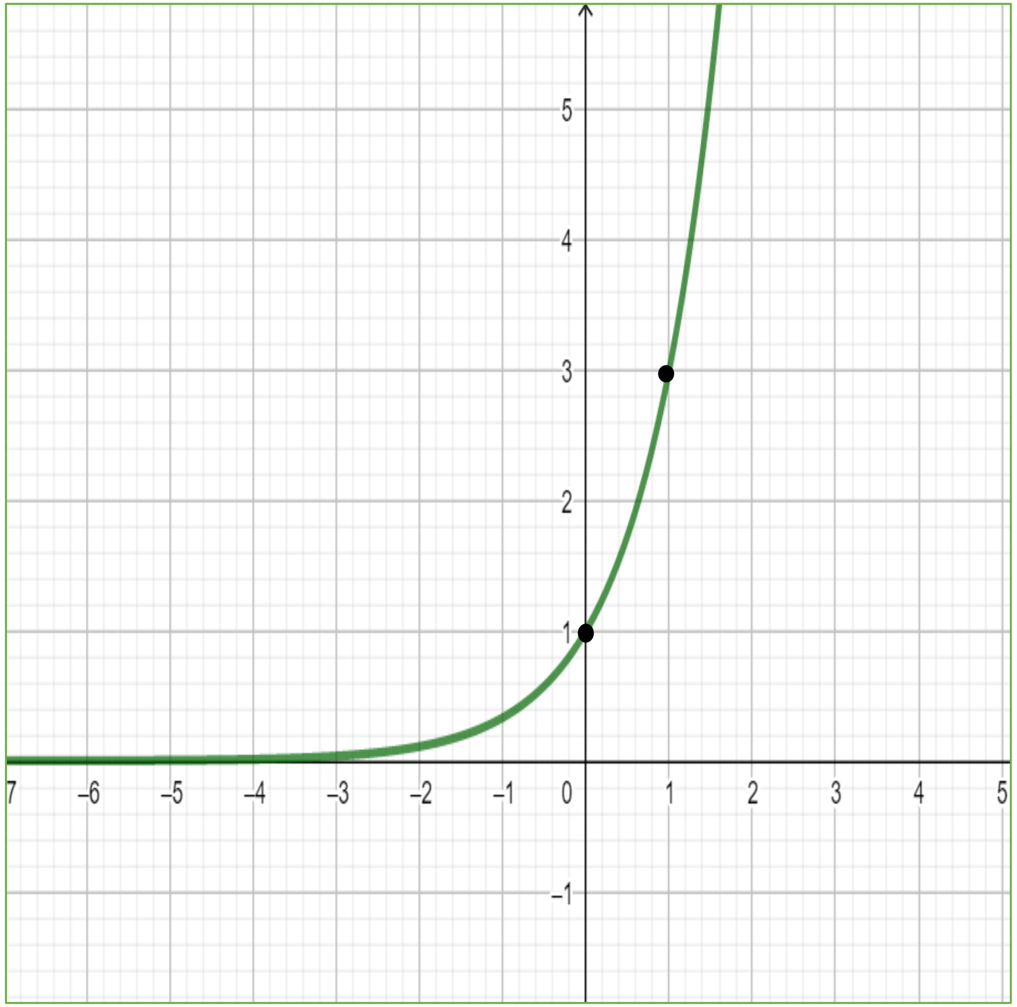
Propriétés graphiques

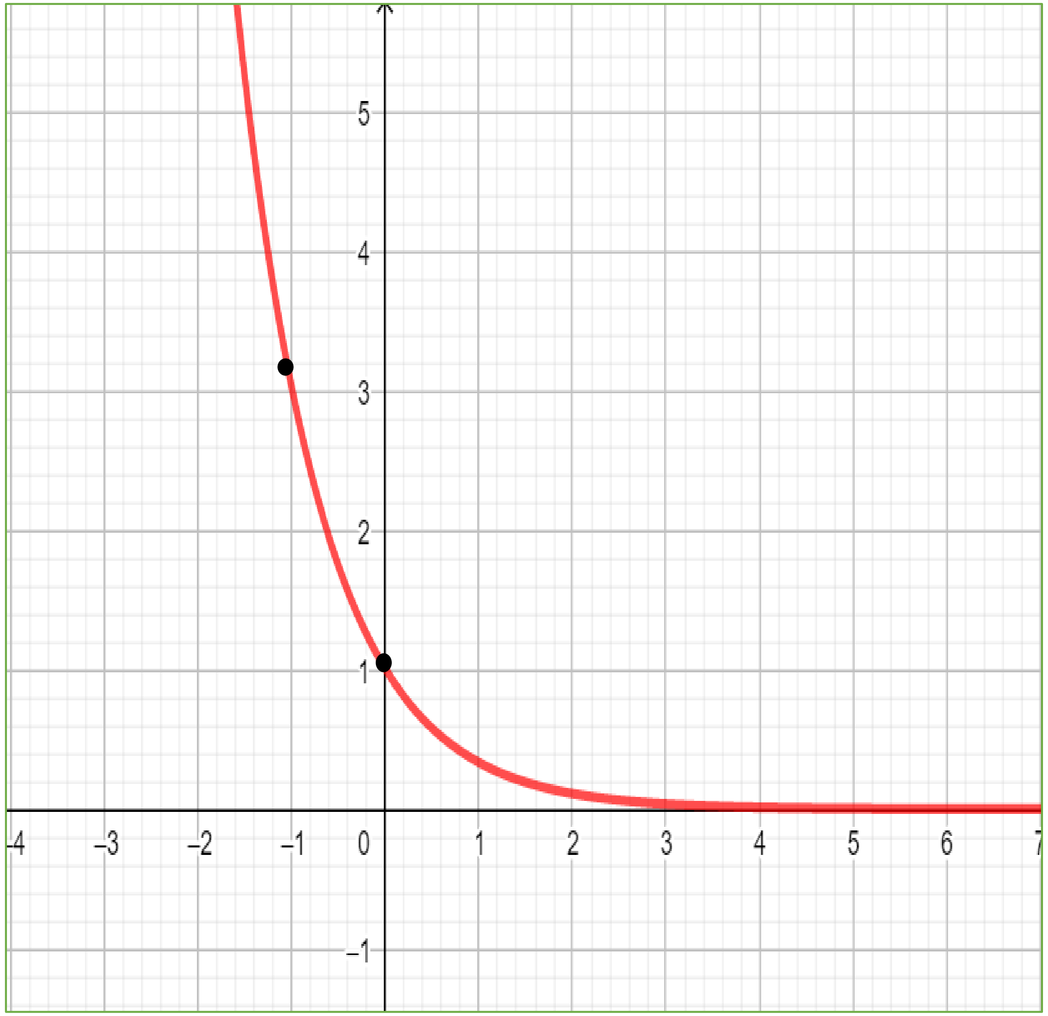


$g(x) = a^x$ $0 < a < 1$	
$Dom(g)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(g)$	$]0, +\infty[$
$g(0)$	1
$g(x) = 0$	$S = \varnothing$
Asymptote	$y = 0$, active à droite
Branche parabolique	Direction verticale, dans le 2ème quadrant

Propriétés graphiques

Exemple : Lequel de ces graphes représente la fonction $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ et lequel représente la fonction $f(x) = 3^{x}$?





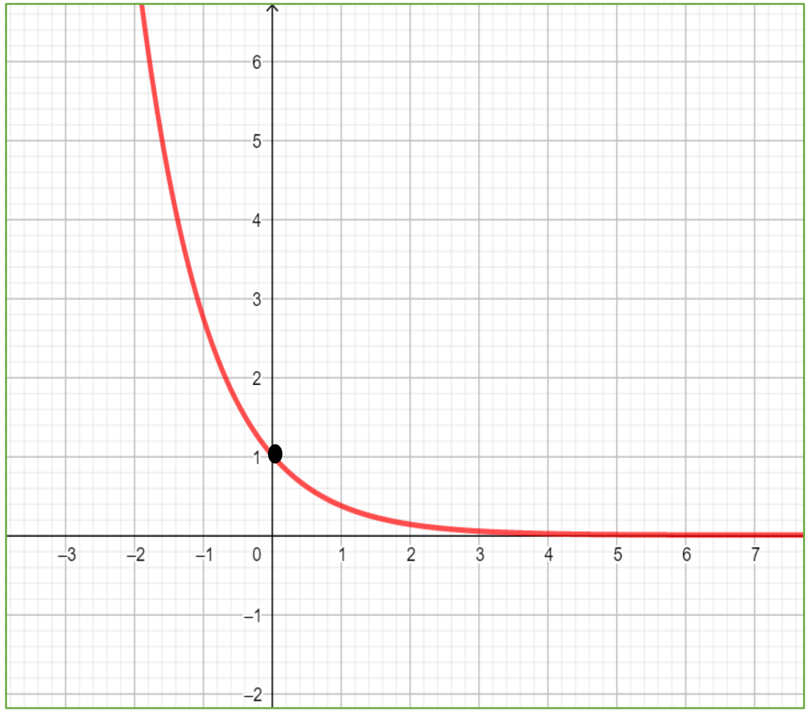
Propriétés graphiques: fonction exponentielle de base *e*

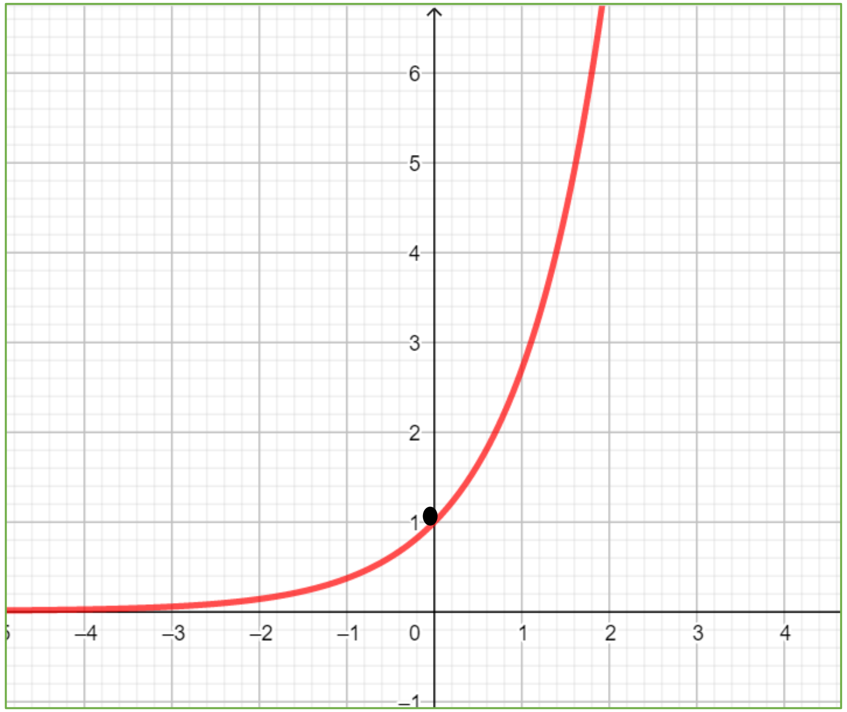
<u>Définition</u> On appelle fonction exponentielle (naturelle), la fonction exponentielle de base $\boldsymbol{e}$ définie par :

$$\boldsymbol{f(x) = e^{x}}$$

Où $e \approx 2{,}718\ 281\ 828 \ldots$, appelée la base népérienne.

Exemple : $\boldsymbol{e^{-1}}$ étant l'inverse du nombre e, lequel de ces graphes représente la fonction $\boldsymbol{f(x) = e^{x}}$ et lequel représente la fonction $\boldsymbol{g(x) = e^{-x}}$ = $(\boldsymbol{e^{-1}})^{\boldsymbol{x}}$?





Résolution d'équations exponentielles

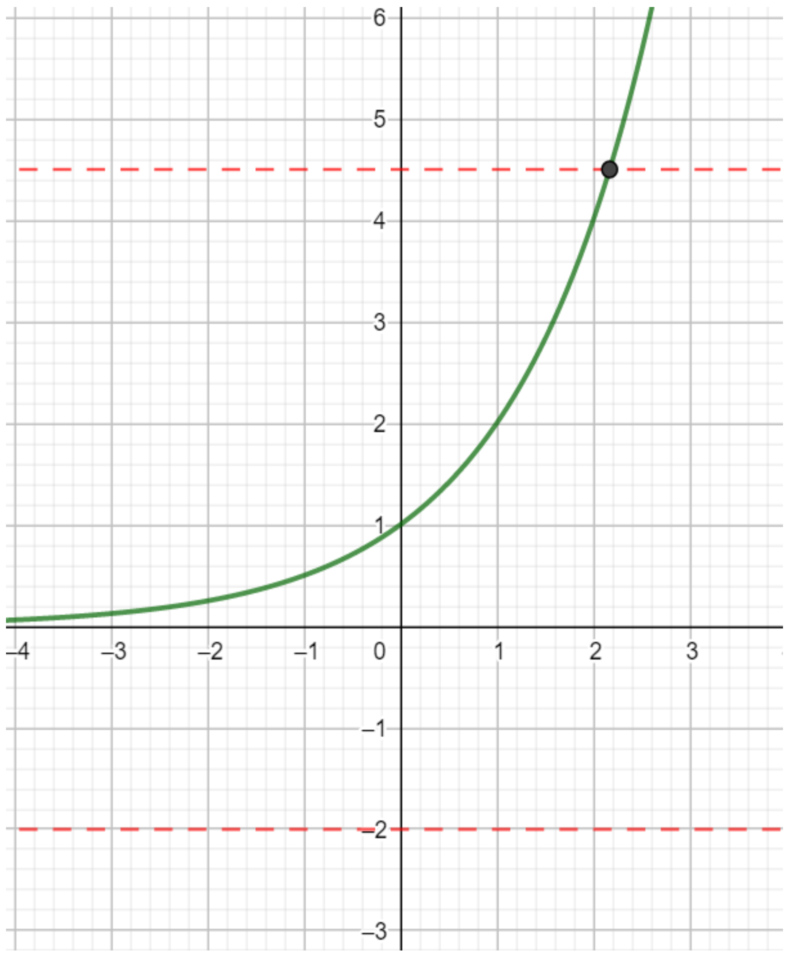
Il est question de résoudre des équations contenant des expressions exponentielles qu'on peut ramener à une base commune.

Une fonction exponentielle est injective, c'est-à-dire que deux **valeurs différentes** de x ont **deux images différentes**. Par conséquent, si deux points du graphique ont la même ordonnée, ils ont nécessairement la même abscisse.
L'équivalence correspondant à cette définition est la suivante:

$$a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$$

En particulier, si $a = e$ la formulation devient:

$$e^u = e^v \Leftrightarrow u = v$$



Graphiquement, cela implique que toute droite horizontale, $y = k$, croise la courbe en au plus 1 point.

Résolution d’équations exponentielles

Exemple : Résoudre l’équation $e^{5-x^2}=1$

Le domaine de cette équation est $\mathbb{R}$.

On peut écrire successivement

$$e^{5-x^2}=1 \Leftrightarrow e^{5-x^2}=e^0$$

$a^0=1,\ a\neq 0$

$$\Leftrightarrow 5-x^2=0$$

Propriété d'injectivité:

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x)=0$$

Identité remarquable

$x=\pm\sqrt{5}$ sont les deux solutions de l'équation.

$\Leftrightarrow$

L’ensemble solution est $S=\left\{-\sqrt{5}\ ,\ \sqrt{5}\right\}$

Résolution d'équations exponentielles

Exemple : Résoudre l'équation $\dfrac{5^{2+x}}{25^x} = \dfrac{1}{5}$

Le domaine de cette équation est $\mathbb{R}$. On peut écrire successivement

$$\frac{5^{2+x}}{25^x} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5 \times 5^{2+x} = 25^x$$

Produit de puissances de même base

$$\Leftrightarrow 5^{2+x+1} = 25^x$$

Puissances d'une puissance

$$\Leftrightarrow 5^{2+x+1} = (5^2)^x$$

$$\Leftrightarrow 5^{x+3} = 5^{2x}$$

Propriété d'injectivité:

$$\Leftrightarrow x + 3 = 2x$$

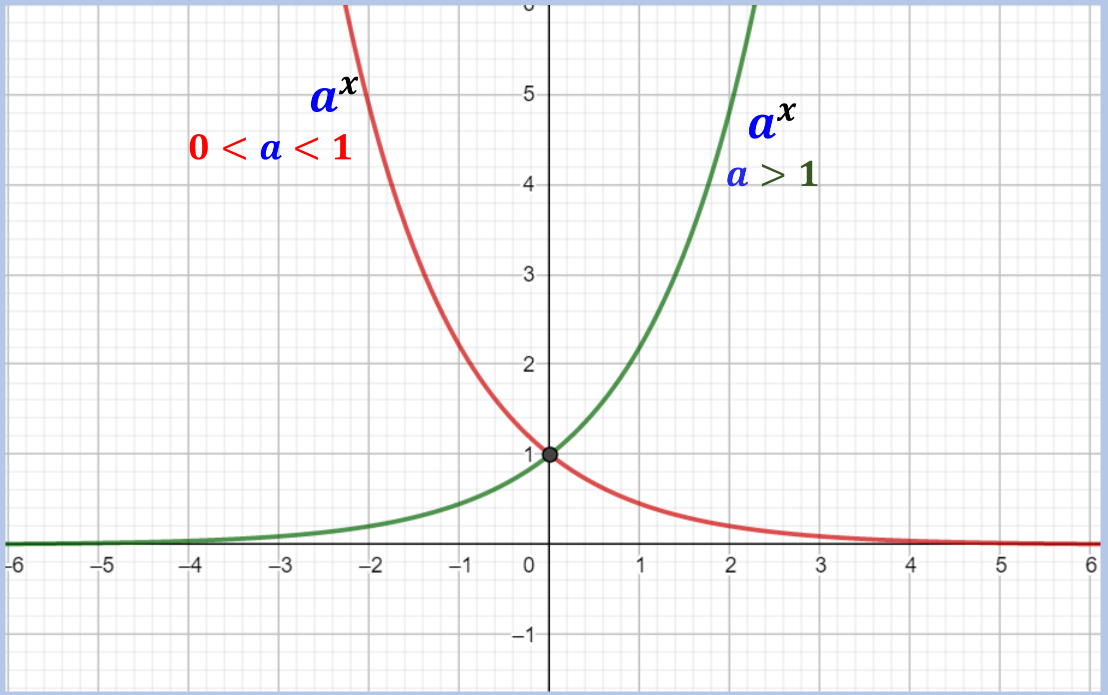
$$\Leftrightarrow \quad 3 = x$$

L'ensemble solution est donc $S = \{3\}$

Résumé

Fonction exponentielle : $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

- $Dom(f) = \mathbb{R}$ $\quad \mathrm{Im}(f) =]0, +\infty[$ $\quad f(0) = 1$
- **Zéros: La fonction exponentielle n'admet pas de zéro**
- **Asymptote horizontale $y = 0$: active à gauche ou à droite**
- **Branche parabolique de direction verticale**



Propriété très utile: $a^{x+y} = a^x a^y$, $a > 0$, $a \neq 1$ et $x, y \in \mathbb{R}$

Résolution d'équations exponentielles : possible si on peut transformer en puissances d'une même base

$$a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$$

En particulier, si $a = e$ la formulation devient: $e^u = e^v \Leftrightarrow u = v$

<u>Références</u>

- Michèle Gingras, Mathématique d’appoint, 5e édition, 2015, Éditeur Chenelière éducation

- Josée Hamel, Mise à niveau Mathématique, 2e édition, 2017, Éditeur Pearson (ERPI)