HEC MONTRÉAL

DÉPARTEMENT DE SCIENCES DE LA DÉCISION
FATIHA KACHER - Maître d'enseignement
CENTRE D'AIDE EN MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE
MICHEL KEOULA - Coordonnateur

MATHÉMATIQUES D'APPOINT

LES INTERVALLES DE $\mathbb{R}$

INTERVALLES DE $\mathbb{R}$

- Description d’un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

- Intervalles

Les intervalles

a : salaire annuel de Guiva

b : salaire annuel de Messi

Soit a et b deux nombres réels.

- $a = b$ (a est égal à b)
- $a < b$ (a est inférieur à b) $a \leq b$ (a est inférieur ou égal à b)
- $a > b$ (a est supérieur à b) $a \geq b$ (a est supérieur ou égal à b)

Un intervalle est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant tous les nombres réels compris entre deux nombres réels distincts a et b.
Les bornes (extrémités) a et b peuvent être incluses ou exclues de l'intervalle.

Comment définir un sous-ensemble de $\mathbb{R}$?

En extension : Énumérer ses éléments, les séparer par des virgules et les mettre entre deux accolades.

- $\left\{\mathbf{1}\,,\sqrt{\boldsymbol{e}},\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\,,\mathbf{4}\,,-\sqrt{\mathbf{3}},\mathbf{6}\right\}$
- $\mathbb{N} = \{0\,,1\,,2\,,3\,,\ldots,100,\ldots 1000,\ldots,98596,\ldots\}$

En compréhension : Décrire ses éléments par leurs caractéristiques

- $\{x \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{x} \text{ est un diviseur de } 18\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid -\mathbf{1} \leq x \leq 3\}$

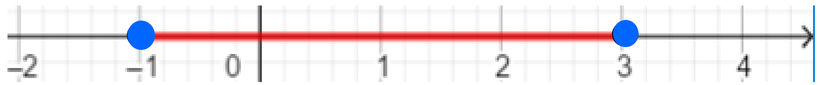
Ensemble vide, noté $\emptyset$ ou bien $\{\ \ \}$, est l'ensemble qui ne contient aucun élément.
Exemple,

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \boldsymbol{x} \text{ est pair et impair}\} = \emptyset$$

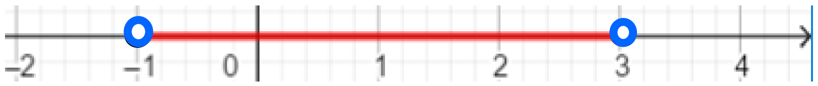
Les intervalles

Description d'un sous—ensemble de nombres réels par un intervalle

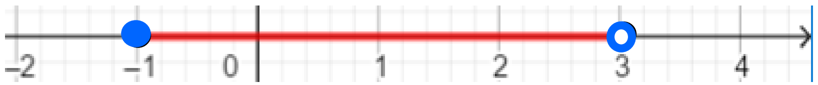
$\{x \in \mathbb{R} | \mathbf{-1} \leq x \leq 3\} = [\mathbf{-1} , \mathbf{3}]$: **intervalle fermé**



$\{x \in \mathbb{R} | \mathbf{-1} < x < 3\} =]\mathbf{-1} , \mathbf{3}[$: **intervalle ouvert**



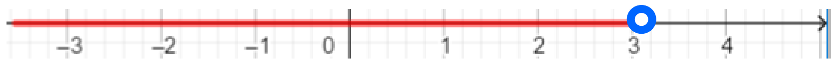
$\{x \in \mathbb{R} | \mathbf{-1} \leq x < 3\} = [\mathbf{-1} , 3[$: **intervalle semi-ouvert**



Les intervalles

Description d'un sous—ensemble de nombres réels par un intervalle

$\{x \in \mathbb{R} | \ x < 3\} =]-\infty\ , 3[$: **intervalle ouvert**



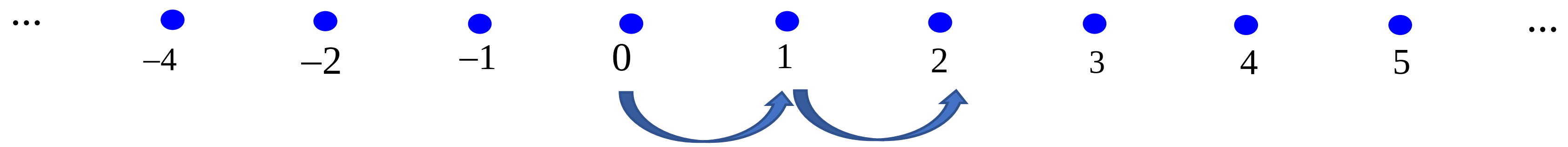
$\{x \in \mathbb{R} | \ x \geq 3\} = [3\ , \infty[$: **intervalle semi-ouvert**

$\{x \in \mathbb{R} | \ x \leq 3\} =]-\infty\ , 3]$: **intervalle semi-ouvert**

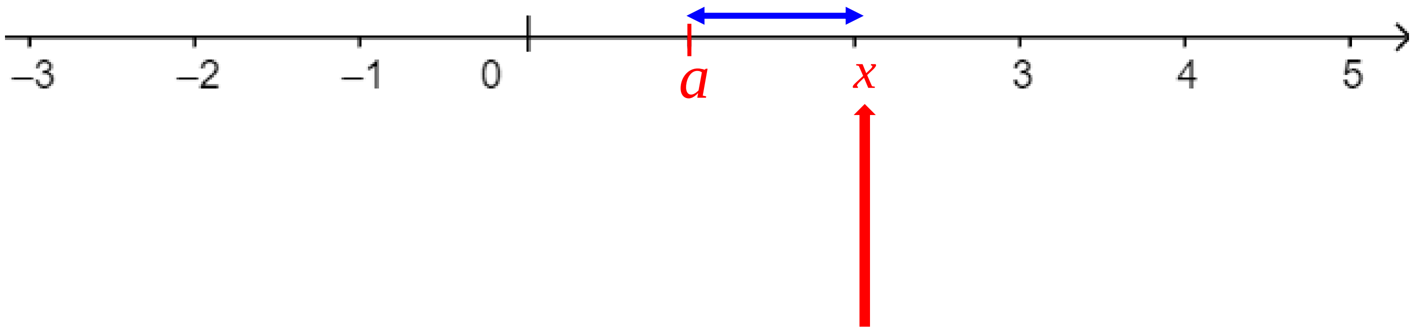
$\{x \in \mathbb{R} | \ x > 3\} =]3\ , \infty\ [$: **intervalle ouvert**

Les intervalles

- Peut-on définir un intervalle sur $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$) ?

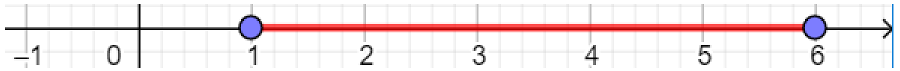


- Pourquoi est-ce que cette notion d'intervalle est-elle utile dans $\mathbb{R}$?

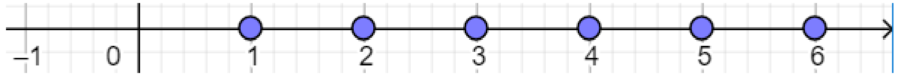


Les intervalles

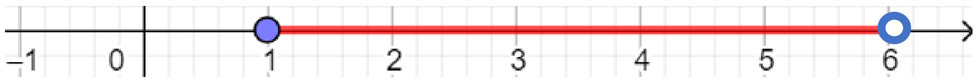
$\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbf{1} \leq x \leq 6\} = [\mathbf{1}\,, \mathbf{6}]$



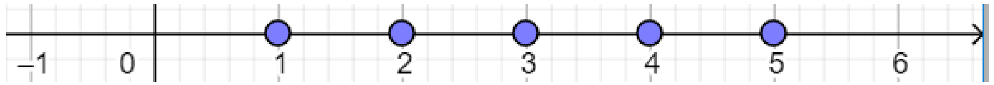
$\{x \in \mathbb{N} \mid \mathbf{1} \leq x \leq 6\} = \{\mathbf{1}\,, \mathbf{2}, \mathbf{3}\,, \mathbf{4}\,, \mathbf{5}, \mathbf{6}\}$



$\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbf{1} \leq x < 6\} = [\mathbf{1}\,, 6[$



$\{x \in \mathbb{N} \mid \mathbf{1} \leq x < 6\} = \{\mathbf{1}\,, \mathbf{2}, \mathbf{3}\,, \mathbf{4}\,, \mathbf{5}\}$



Remarques

Mise en garde

$$[\mathbf{1}\,,\mathbf{6}] \neq \{\mathbf{1}\,,\mathbf{2},\mathbf{3}\,,\mathbf{4}\,,\mathbf{5},\mathbf{6}\}$$

$$[\mathbf{1}\,,6[\ \neq \{\mathbf{1}\,,\mathbf{2},\mathbf{3}\,,\mathbf{4}\,,\mathbf{5}\}$$

Les operations sur les ensembles

Union (ou réunion $\cup$) de deux ensembles :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \text{ ou } \ x \in B\}$$

Intersection ($\cap$) de deux ensembles :

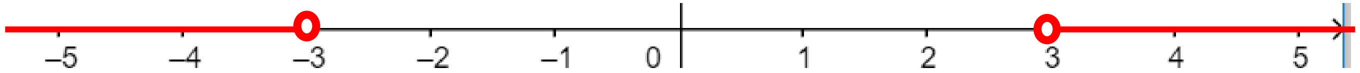
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \text{ et } \ x \in B\}$$

Différence de deux ensembles ($\setminus$) de deux ensembles :

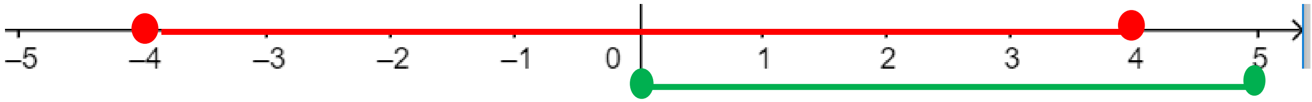
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \text{ et } \ x \notin B\}$$

Exemples

$$\{x \in \mid x < -3 \ \text{ ou } \ x > 3\} =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$$



$$[-4,\ 4] \cap [0\ ,\ 5] = [0,\ 4]$$



$$\mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty\ ,\ 0[\cup]0\ ,\ +\infty[$$

Résumé

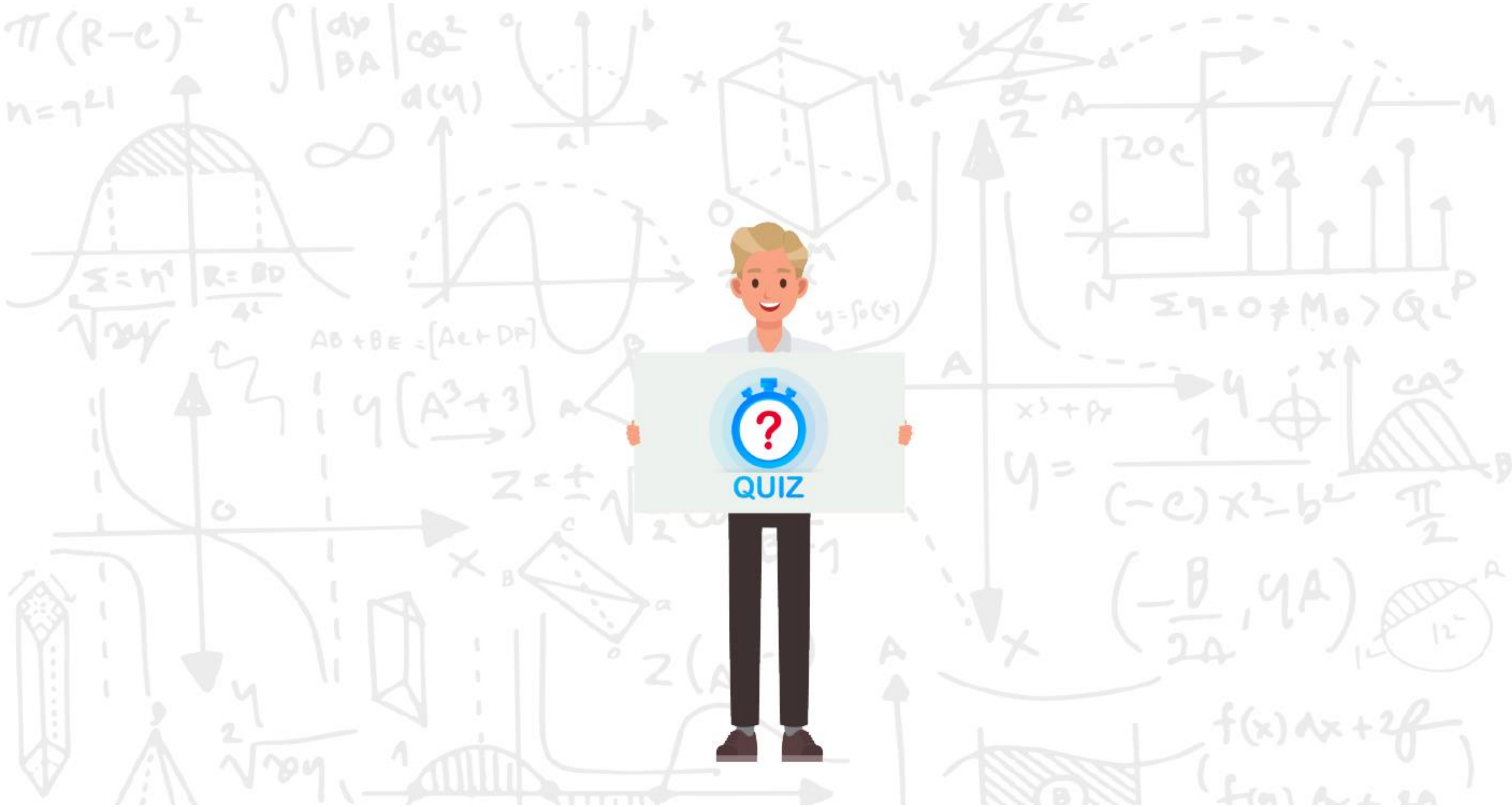
- Pour décrire un sous-ensemble de l'ensemble des nombres réels inférieurs, supérieurs à un autre nombre ou bien compris entre deux nombres réels distincts, on utilise les intervalles :
  $[a\,,b]\,,[a\,,b[\,,]a\,,b]\ et\ ]a\,,b[$, où $a \leq b$.

- Les éléments d'un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ sont placés entres deux accolades $\{\ldots,\ldots,\ldots\}$.

- Attention, il faut toujours prendre en considération l'ensemble de nombres qui contient le sous-ensemble.

RÉFÉRENCES

- Michèle Gingras, **Mathématique d'appoint**, 5e édition, 2015, Éditeur Chenelière éducation.
- Josée Hamel, **Mise à niveau Mathématique**, 2e édition, 2017, Éditeur Pearson (ERPI)


QUIZ