HEC MONTRÉAL

DÉPARTEMENT DE SCIENCES DE LA DÉCISION
FATIHA KACHER – Maître d'enseignement
CENTRE D'AIDE EN MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE
MICHEL KEOULA – Coordonnateur

MATHÉMATIQUES D'APPOINT

LES EXPOSANTS ENTIERS

LES EXPOSANTS ENTIERS

1 PUISSANCE D'UN NOMBRE

Exemple

Valeur initiale : 100 $

Taux d'intérêt: $5\% = \dfrac{5}{100} = 0{,}05$

Valeur acquise au bout de *n années*?

1 PUISSANCE D'UN NOMBRE

Exemple

100 $

$5\% = \dfrac{5}{100} = 0,05$

Valeur après *n années*?

Après 1 an

$$100 + 0,05 \times 100 = 100 \times 1,05 = 105$$

t = 0   t = 1

100   *100 × 1,05*

1 PUISSANCE D'UN NOMBRE

Exemple

100 $

$5\% = \dfrac{5}{100} = 0,05$

Valeur après *n années*?

Après 2 ans

$105 \times 1,05 = 100 \times 1,05 \times 1,05 = 110,25$

t = 0 — 100

t = 1 — *100 × 1,05*

t = 2 — *100 × 1,05 × 1,05*

1 PUISSANCE D'UN NOMBRE

Exemple

100 \$

$5\% = \frac{5}{100} = 0,05$

Valeur après *n années*?

Après 3 ans

$110,25 \times 1,05 = 100 \times 1,05 \times 1,05 \times 1,05 = 115,76$

t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
100	*100 × 1,05*	*100 × 1,05 × 1,05*	*100 × 1,05 × 1,05 × 1,05*

1 PUISSANCE D'UN NOMBRE

Exemple

100 $

$5\% = \dfrac{5}{100} = 0,05$

Valeur après *n années*?

Après *n* années

$100 \times 1,05 \times 1,05 \times \ldots \times 1,05$ avec n termes identiques égaux à 1,05

t = 0	t = 1	t = 2	...	t = n
100	*100 × 1,05*	*100 × 1,05 × 1,05*		*100 × 1,05 × 1,05 ×... × 1,05*

1 PUISSANCE D'UN NOMBRE

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} \;, n \in \mathbb{N}^*$$

a est la **base** et n est l'**exposant**

« a à la puissance n »

« a exposant n »

a^2 *se lit « a au carré »*

a^3 *se lit « a au cube »*

Exemple : $(-5)^3$

Se lit : (-5) exposant **3** ou

(-5) au **cube**

Se calcule : $(-5)^3 = (-5)\times(-5)\times(-5) = -125$

1 PUISSANCE D'UN NOMBRE

100 $

$5\% = \frac{5}{100} = 0,05$

Valeur après *n années*?

t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = n
100	100 × 1,05	100 × 1,05 × 1,05	100 × 1,05 × 1,05 × 1,05	100 × 1,05 × 1,05 ×... × 1,05
$V_0 = 100$	$V_1 = 100 \times 1,05$	$V_2 = 100(1,05)^2$	$V_3 = 100(1,05)^3$	$V_n = 100(1,05)^n$

2 LOIS DES EXPOSANTS | PRODUIT ET QUOTIENT DE PUISSANCES DE MÊME BASE

Propriété 01

$$a^n a^m = a^{n+m}, \quad où \quad m, n \in \mathbb{N}^*$$

Exemple :
$$2^4 \times 2^3 = 2^{4+3}$$
$$= 2^7$$
$$= 128$$

Propriété 02

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \ où \ a \neq 0 \ \ et \ \ m, n \in \mathbb{N}^*$$

Exemple :
$$\frac{2^4}{2^3} = 2^{4-3} = 2^1$$
$$= 2$$

⚠

$$a^n b^m \neq (ab)^{n+m}, où \ \ m, n \in \mathbb{N}^*$$

2 LOIS DES EXPOSANTS — PUISSANCE D'UN PRODUIT OU D'UN QUOTIENT

Propriété 03

$$(ab)^n = a^n b^n, \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

Exemple : $(2\times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$

$= 8 \times 125$

$= 1000$

Propriété 04

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ où } b \neq 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

Exemple : $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$

PUISSANCE D'UNE PUISSANCE

Propriété 05

$$\left(a^{m}\right)^{n} = a^{m\times n}, \quad \text{où} \quad m, n \in \mathbb{N}^*$$

Exemple :

$$\left(\left(-2\right)^{3}\right)^{2} = \left(-2\right)^{3\times 2}$$
$$= \left(-2\right)^{6}$$

2 LOIS DES EXPOSANTS | PUISSANCE D'UNE PUISSANCE

Propriété 05

$$\left(a^{m}\right)^{n} = a^{m\times n}, \quad où \quad m, n \in \mathbb{N}^{*}$$

Exemple :
$$\left(\left(\left(-2\right)^{3}\right)^{2}\right)^{4} = \left(\left(-2\right)^{3\times 2}\right)^{4}$$
$$= \left(\left(-2\right)^{6}\right)^{4}$$
$$= \left(-2\right)^{6\times 4}$$
$$= \left(-2\right)^{24}$$

2 LOIS DES EXPOSANTS

Propriété 01	$a^n a^m = a^{n+m}$, où $m, n \in \mathbb{N}^*$
Propriété 02	$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, où $a \neq 0$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$
Propriété 03	$(ab)^n = a^n b^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$
Propriété 04	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, où $b \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$
Propriété 05	$(a^m)^n = a^{m \times n}$, où $m, n \in \mathbb{N}^*$

3 PUISSANCES PARTICULIÈRES

Exemple :

$5^1 = 5$ $\quad\quad$ $(-2)^1 = -2$

$$a^1 = a$$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}, \; n \in \mathbb{N}^*$$

$n = 1$

3 PUISSANCES PARTICULIÈRES

Exemple :

$5^0 = 1 \qquad (-2)^0 = 1$

$$a^0 = 1 \quad si \quad a \neq 0$$

$$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0, \; si \quad a \neq 0$$

3 PUISSANCES PARTICULIÈRES

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Exemple :

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$a^{-n}a^n = a^0$$
$$= 1$$

Propriété de l'inverse d'une fraction

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}, \quad si \quad a \neq 0, b \neq 0}$$

3 PUISSANCES PARTICULIÈRES

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Exemple :

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$a^{-n}a^{n} = a^{0}$$
$$= 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}, \quad si \quad a \neq 0, b \neq 0$$

Exemple :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

3 PUISSANCES PARTICULIÈRES

Propriété de la puissance d'une puissance

$$\left(a^m\right)^n = a^{m\times n},\ où\ \ m,n\in\mathbb{N}^*$$

Propriété du produit de puissances de même base

$$a^n a^m = a^{n+m},où\ \ m,n\in\mathbb{N}^*$$

Soit n et k deux entiers naturels

$$(-1)^n$$

Si n est pair

$$n=2k$$

alors $(-1)^{2k}=\left((-1)^2\right)^k$

$$=1^k=1$$

Si n est impair

$$n=2k+1$$

alors $(-1)^{2k+1}=(-1)^{2k}(-1)$

$$=-1$$

EXEMPLE RÉSOLU: SIMPLIFICATION D'UNE EXPRESSION

Simplifier l'expression suivante : $\dfrac{x^3y^4x^2y}{x^7y(xy)^2}$, avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$

$$\frac{x^3y^4x^2y}{x^7y(xy)^2} = \frac{x^3y^4x^2y}{x^7y(xy)^2} = \frac{x^3x^2\ y^4y}{x^7y\ x^2y^2} = \frac{x^{3+2}\quad y^{4+1}}{x^7\ x^2\ yy^2} = \boxed{\frac{x^5}{x^9}}\boxed{\frac{y^5}{y^3}}$$

$$= x^{5-9}\,y^{5-3}$$

$$= \boxed{x^{-4}}\,y^2$$

$$\frac{1}{x^4}\ y^2$$

$$= \frac{1}{x^4}\,\frac{y^2}{1}$$

$$= \frac{y^2}{x^4} \qquad = \left(\frac{y}{x^2}\right)^2$$

Aide mémoire

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

RÉSUMÉ

Propriétés des exposants

$a, b \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$

$$a^n a^m = a^{n+m}, \text{ où } m, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \text{ où } a \neq 0 \text{ et } m, n \in \mathbb{N}^*$$

$$(ab)^n = a^n b^n, \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ où } b \neq 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

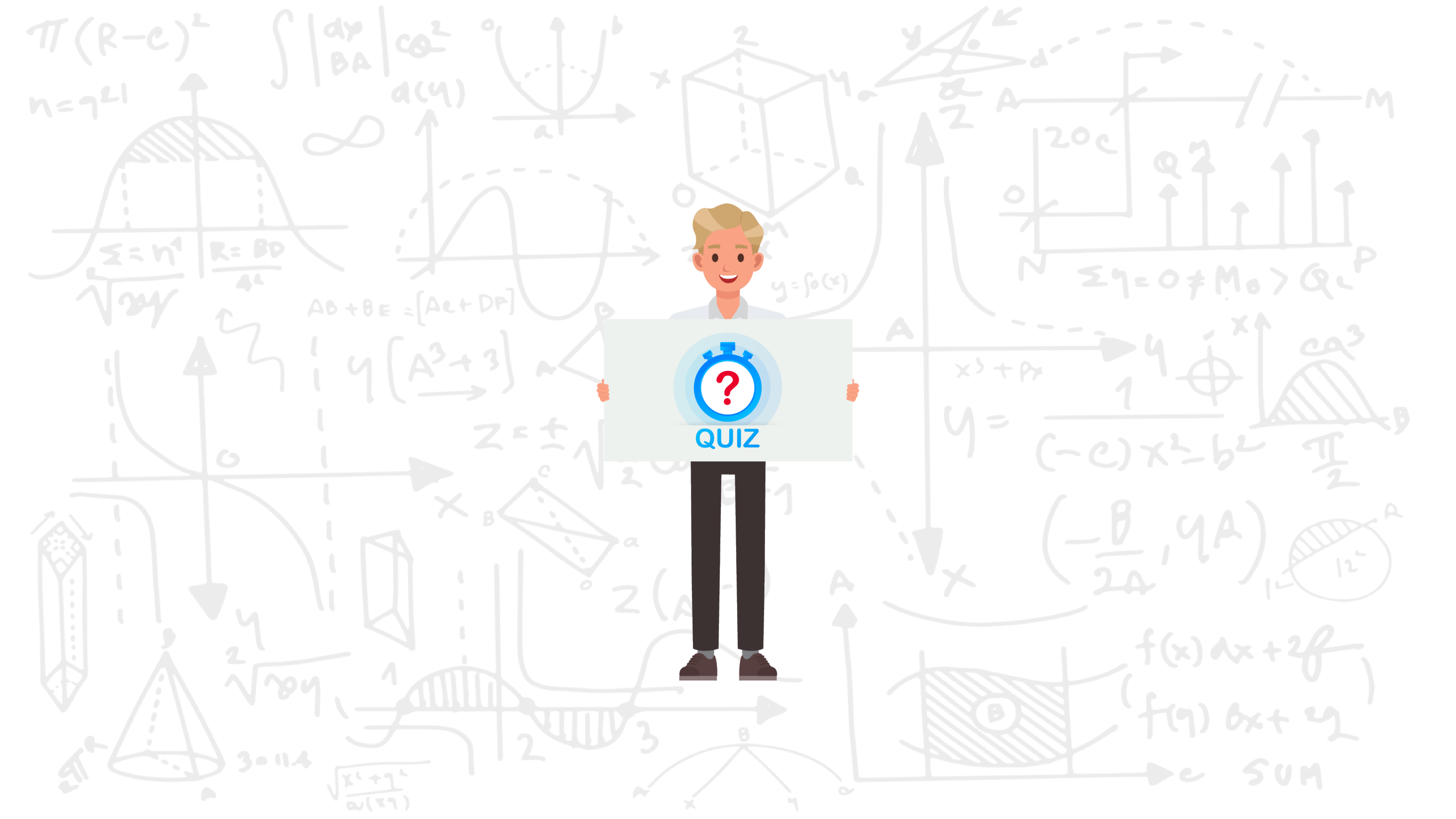
$$\left(a^m\right)^n = a^{m \times n}, \text{ où } m, n \in \mathbb{N}^*$$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1, \text{ si } a \neq 0$$

RÉFÉRENCES

- Michèle Gingras, **Mathématique d'appoint**, 5e édition, 2015, Éditeur Chenelière éducation.
- Josée Hamel, **Mise à niveau Mathématique**, 2e édition, 2017, Éditeur Pearson (ERPI)


QUIZ

HEC MONTRÉAL

DÉPARTEMENT DE SCIENCES DE LA DÉCISION

CENTRE D'AIDE EN MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE

2020

Direction de l'apprentissage et de l'innovation pédagogique

Service de l'audiovisuel