HEC MONTRÉAL

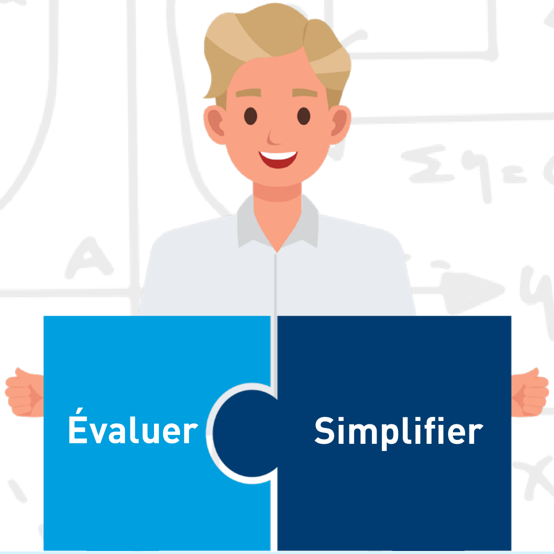
DÉPARTEMENT DE SCIENCES DE LA DÉCISION
FATIHA KACHER – Maître d'enseignement
CENTRE D'AIDE EN MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE
MICHEL KEOULA – Coordonnateur

MATHÉMATIQUES D'APPOINT

LES EXPOSANTS RATIONNELS

LES EXPOSANTS RATIONNELS

LES EXPOSANTS RATIONNELS



Les expressions comportant des racines $n^{\text{ièmes}}$ et des exposants rationnels.

EXEMPLE: DOUBLER LA VALEUR DE SON PLACEMENT EN 10 ANS

Valeur initiale : 100 $

Taux d'intérêt annuel i ?

Valeur double au bout de *10 ans*

EXEMPLE: DOUBLER LA VALEUR DE SON PLACEMENT EN 10 ANS

100 $

i ?

Valeur double après *10 ans*?

t = 0 | t = 1 | t = 2 | t = 3 | t = 10

$V_0 = 100$ $\quad V_1 = 100 \times (1+i)$ $\quad V_2 = 100(1+i)^2$ $\quad V_3 = 100(1+i)^3$ $\quad V_{10} = 100(1+i)^{10}$

i tel que $100 \times (1+i)^{10} = 200$

$$(1+i)^{10} = \frac{200}{100} = 2$$

$(1+i) = \sqrt[10]{2}$ → racine dixième positive de 2

1 RACINE $n^{ième}$ D'UN NOMBRE

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si b est tel que

$$b^n = a$$

alors b est une racine $n^{ième}$ de a

Exemples:

- $2^2 = (-2)^2 = 4$, donc 2 et -2 sont des racines carrées de 4
- $(-2)^3 = -8$, donc -2 est une racine cubique de -8
- $2^{10} = (-2)^{10} = 1024$, donc 2 et -2 sont des racines dixièmes de 1024
- $(1,73205...)^2 = (-1,73205...)^2 \cong 3$,
  donc $1,73205$ et $-1,73205$ sont des <u>valeurs approchées</u> des racines carrées de 3

1 RACINE $n^{ième}$ D'UN NOMBRE

RACINE $n^{ième}$ PRINCIPALE D'UN NOMBRE

IMPORTANT

La racine $n^{ième}$ principale de a, notée $\sqrt[n]{a}$, dépend de la parité de n, $n \in \mathbb{N}^*$

IMPORTANT

- $\sqrt[n]{\boxed{}}$ est le radical
- n est l'indice du radical
- $\sqrt{a}$ correspond à la racine carrée

1 RACINE $n^{ième}$ D'UN NOMBRE — RACINE $n^{ième}$ PRINCIPALE D'UN NOMBRE

IMPORTANT

La racine $n^{ième}$ principale de a, notée $\sqrt[n]{a}$, dépend de la parité de n, $n \in \mathbb{N}^*$

IMPORTANT

n est pair $\left(n = 2, 4, 6, ..., 2k, k \in \mathbb{N}^*\right)$

- Si $a \geq 0$, et $b^n = a$ alors $\sqrt[n]{a} = b$ avec $b \geq 0$
- Si $a < 0$, alors $\sqrt[n]{a} = b$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$

Exemples :

- $\sqrt{3} \cong 1,73205$ est la racine carrée principale de 3.
- $\sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$ est la racine dixième principale de 1024.

1 RACINE $n^{ième}$ D'UN NOMBRE — RACINE $n^{ième}$ PRINCIPALE D'UN NOMBRE

IMPORTANT

La racine $n^{ième}$ principale de a, notée $\sqrt[n]{a}$, dépend de la parité de n, $n \in \mathbb{N}^*$

IMPORTANT

n est pair $(n = 2, 4, 6, \dots, 2k, k \in \mathbb{N}^*)$

- Si $a \geq 0$, et $b^n = a$ alors $\sqrt[n]{a} = b$ avec $b \geq 0$
- Si $a < 0$, alors $\sqrt[n]{a} = b$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$

n est impair $(n = 1, 3, 5, \dots, 2k+1, k \in \mathbb{N})$

- Si $b^n = a$ alors $\sqrt[n]{a} = b$ et $\sqrt[n]{a}$ est **unique**

Exemple :

$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$ est la racine cubique principale et l'unique racine cubique de -8.

1 RACINE $n^{ième}$ D'UN NOMBRE — SOLUTIONS DE L'ÉQUATION $x^n = a$

$a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Si n est impair $\left(n = 1, 3, 5, \ldots, 2k+1, k \in \mathbb{N}\right)$

- $\sqrt[n]{a}$ est toujours définie
- $x = \sqrt[n]{a}$ est l'unique solution réelle de l'équation $x^n = a$
- $\sqrt[n]{a}$ a le même signe que a

Exemples :

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

<u>*Vérification:*</u> $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

$$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$$

<u>*Vérification:*</u> $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$

1 RACINE $n^{ième}$ D'UN NOMBRE

SOLUTIONS DE L'ÉQUATION $x^n = a$

$a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Si n est pair $\left(n = 2, 4, 6, \ldots, 2k, k \in \mathbb{N}^*\right)$

- $\sqrt[n]{a}$ est définie si et seulement si $a \geq 0$
- Si $a \geq 0$, alors $x = \sqrt[n]{a}$ et $x = -\sqrt[n]{a}$ sont les solutions réelles de l'équation $x^n = a$.

Exemples :

- $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$: racine carrée principale
- $-\sqrt{16} = -\sqrt{4^2} = -4$
- $\sqrt{-16}$ n'existe pas.
- $x^2 = -16$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$
- Si n est pair et $n > 2,$ alors $\sqrt[n]{-16}$ n'existe pas.
- $\sqrt[n]{0} = 0$

1 RACINE $n^{ième}$ D'UN NOMBRE | SOLUTIONS DE L'ÉQUATION $x^n = a$

$$\cancel{\sqrt{16} = \pm 4}$$

$$x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

$a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Si n est pair $(n = 2, 4, 6, ..., 2k, k \in \mathbb{N}^*)$

- $\sqrt[n]{a}$ est définie si et seulement si $a \geq 0$
- Si $a \geq 0$, alors $x = \sqrt[n]{a}$ et $x = -\sqrt[n]{a}$ sont les solutions réelles de l'équation $x^n = a$.

1 RACINE $n^{ième}$ D'UN NOMBRE | SOLUTIONS DE L'ÉQUATION $x^n = a$

solutions de l'équation $x^n = a$

$$x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

$$\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$$

racine nième d'un nombre

$a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Si n est pair $\left(n = 2, 4, 6, \ldots, 2k, k \in \mathbb{N}^*\right)$

- $\sqrt[n]{a}$ est définie si et seulement si $a \geq 0$
- Si $a \geq 0$, alors $x = \sqrt[n]{a}$ et $x = -\sqrt[n]{a}$ sont les solutions réelles de l'équation $x^n = a$.

2 RACINE $n^{ième}$ ET EXPOSANT RATIONNEL

Si $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, si la racine $n^{ième}$ existe, alors $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

100 $

t = 0 t = 1 t = 2 t = 3 t = 10

$V_0 = 100$ $V_1 = 100 \times (1+i)$ $V_2 = 100(1+i)^2$ $V_3 = 100(1+i)^3$ $V_{10} = 100(1+i)^{10}$

i ?

Valeur double
après *10 ans*?

$$(1+i)^{10} = 2$$

$$\left((1+i)^{10}\right)^{\frac{1}{10}} = 2^{\frac{1}{10}}$$

$$(1+i)^{1} = 2^{\frac{1}{10}}$$

$$1+i = \boxed{2^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{2}}$$

2 RACINE $n^{ième}$ ET EXPOSANT RATIONNEL

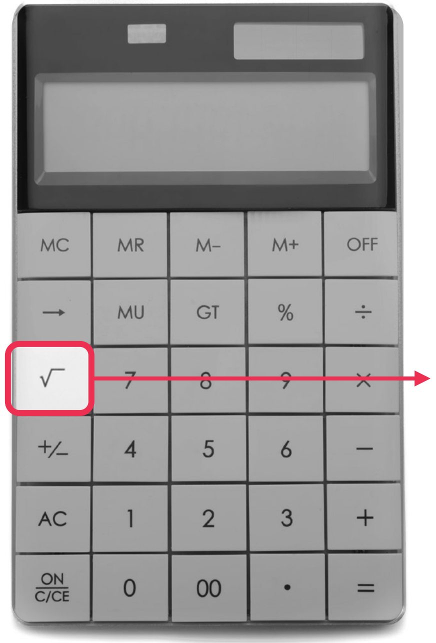
Si $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, si la racine $n^{ième}$ existe, alors $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$$2^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{2}$$

2 RACINE $n^{ième}$ ET EXPOSANT RATIONNEL

Si $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, si la racine $n^{ième}$ existe, alors $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$$2^{\frac{1}{10}}$$



Calculatrice ne possédant pas des touches racines $n^{ièmes}$

Touche de la racine carrée

2 RACINE $n^{ième}$ ET EXPOSANT RATIONNEL

Si $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, si la racine $n^{ième}$ existe, alors $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$$2^{\frac{1}{10}}$$

- $\frac{df}{dx}$ *Le calcul différentiel*
- $\int f(x)dx$ *Le calcul intégral*

2 RACINE $n^{ième}$ ET EXPOSANT RATIONNEL

Si $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, si la racine $n^{ième}$ existe, alors $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

L'existence de $\sqrt[n]{a}$

$\sqrt[3]{16} = (16)^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{-16} = (-16)^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[4]{16} = (16)^{\frac{1}{4}} = 2$

!!!

$\sqrt[4]{-16} = (-16)^{\frac{1}{4}}$ n'est pas définie

2 RACINE $n^{ième}$ ET EXPOSANT RATIONNEL

Si $a \in \mathbb{R}$, et $m, n \in \mathbb{N}^*$, si toutes les racines $n^{ième}$ impliquées existent, alors

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{m \times \frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

la notation équivalente avec les radicaux

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$\sqrt[3]{(16)^5} = (16)^{\frac{5}{3}}$$

$$\sqrt[4]{(16)^5} = (16)^{\frac{5}{4}} = 2^5$$

$$(-16)^{\frac{5}{3}} = \left(\sqrt[3]{-16}\right)^5$$

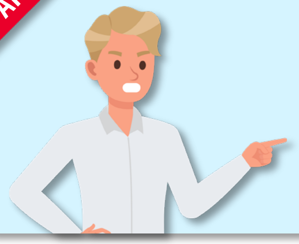
!!

$(-16)^{\frac{5}{4}} = \left(\sqrt[4]{-16}\right)^5$ n'est pas définie

2 RACINE $n^{ième}$ ET EXPOSANT RATIONNEL

Si $a \in \mathbb{R}$, et $m, n \in \mathbb{N}^*$, si la racine $n^{ième}$ existe, alors $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

! ATTENTION



Ne pas écrire $\sqrt{a^2} = a$

2 RACINE $n^{ième}$ ET EXPOSANT RATIONNEL

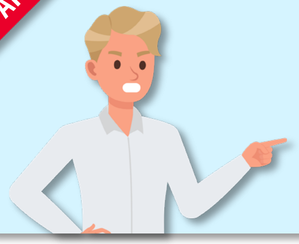
Si $a \in \mathbb{R}$, et $m, n \in \mathbb{N}^*$, si la racine $n^{ième}$ existe, alors $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Ne pas écrire $\sqrt{a^2} = a$

2 RACINE $n^{ième}$ ET EXPOSANT RATIONNEL

Si $a \in \mathbb{R}$, et $m, n \in \mathbb{N}^*$, si la racine $n^{ième}$ existe, alors $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

! ATTENTION



Il faut écrire $\sqrt{a^2} = |a|$

2 RACINE $n^{ième}$ ET EXPOSANT RATIONNEL

Si $a \in \mathbb{R}$, et $m, n \in \mathbb{N}^*$, si la racine $n^{ième}$ existe, alors $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ est impair} \\ |a| & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

L'utilisation des racines nième d'une somme de termes

$$\sqrt[n]{x+y} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$$

$$\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

$$\sqrt{(-10)^2} = |-10| = 10$$

$$\sqrt[4]{(-10)^4} = |-10| = 10$$

2 RACINE $n^{ième}$ ET EXPOSANT RATIONNEL

Si $a \in \mathbb{R}$, et $m, n \in \mathbb{N}^*$, si la racine $n^{ième}$ existe, alors $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ est impair} \\ |a| & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

L'utilisation des racines nième d'une somme de termes

$$\sqrt[n]{x+y} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$$

$$\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Deux résultats différents!

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

2 RACINE $n^{ième}$ ET EXPOSANT RATIONNEL | EXPOSANTS RATIONNELS ET LOIS DES EXPOSANTS

Titre	Loi (la racine nième existe)	Exemples $\left(p=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{3}\right)$
Produit de puissances de même base	$a^p a^q = a^{p+q}$	$\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^5}$
Quotient de puissances de même base	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \ a \neq 0$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}$
Puissance d'un produit	$(ab)^p = a^p b^p$	$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
Puissance d'un quotient	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}, \ b \neq 0$	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
Puissance d'une puissance	$\left(a^p\right)^q = a^{p \times q}$	$\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a}$

Supposons que les expressions suivantes existent.
Exprimez-les en termes de puissances.

RACINE $n^{ième}$ ET EXPOSANT RATIONNEL | EXERCICES RÉSOLUS

Supposons que les expressions suivantes existent.
Exprimez-les en termes de puissances.

1 $a\sqrt{a} = a^{1} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{1+\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$

La propriété du produit de deux puissances de même base

Aide mémoire

$\boxed{a^{n} \times a^{m} = a^{n+m}}$

Supposons que les expressions suivantes existent.
Exprimez-les en termes de puissances.

1 $a\sqrt{a} = a^{1} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{1+\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$

2 $(x+1)\sqrt{x+1} = (x+1)^{1} \times (x+1)^{\frac{1}{2}}$

$= (x+1)^{1+\frac{1}{2}}$

$= (x+1)^{\frac{3}{2}}$

Aide mémoire

$a^{n} \times a^{m} = a^{n+m}$

RACINE $n^{ième}$ ET EXPOSANT RATIONNEL | EXERCICES RÉSOLUS

Supposons que les expressions suivantes existent.
Exprimez-les en termes de puissances.

3

$$\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt[3]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{1} \times a^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{4}{3}}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{4}{3}} = a^{-\frac{5}{6}}$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{5}{6}}}$$

4

$$\frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)\sqrt[3]{x+1}} = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{1} \times (x+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{\frac{4}{3}}} = (x+1)^{-\frac{5}{6}}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^{\frac{5}{6}}}$$

Aide mémoire

$$\frac{a^{n}}{a^{m}} = a^{n-m}, \text{ où } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}, \text{ où } a \neq 0$$

3 ORDRE DE PRIORITÉ DES OPÉRATIONS

$+$ $-$ $\times$ $\div$ a^n

3 ORDRE DE PRIORITÉ DES OPÉRATIONS

Exemple:

$$5 + 2 \times 7 - 3 = 46$$

$$\overset{?}{=} \big((5 + 2) \times 7\big) - 3$$

Les règles de priorité des opérations

Bonne interprétation:

$$5 + 2 \times 7 - 3 = 5 + (2 \times 7) - 3$$

$$= 5 + 14 - 3$$

$$= 16$$

3 ORDRE DE PRIORITÉ DES OPÉRATIONS

Règles de priorité

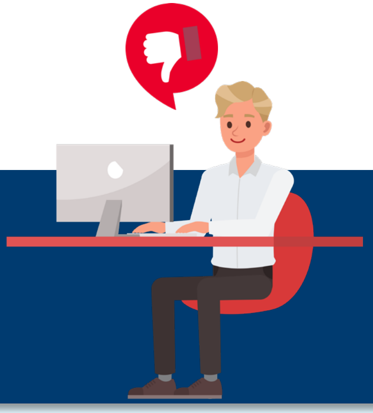
Priorité 01	**Exponentiations** *(exposants sur blocs d'opération: effectuer les blocs en premier selon l'ordre en 2, 3 et 4).*
Priorité 02	Opérations **dans les parenthèses** selon l'ordre en 3 et 4.
Priorité 03	**Divisions et multiplications** de gauche à droite.
Priorité 04	**Additions et soustractions** de gauche à droite.

3 ORDRE DE PRIORITÉ DES OPÉRATIONS

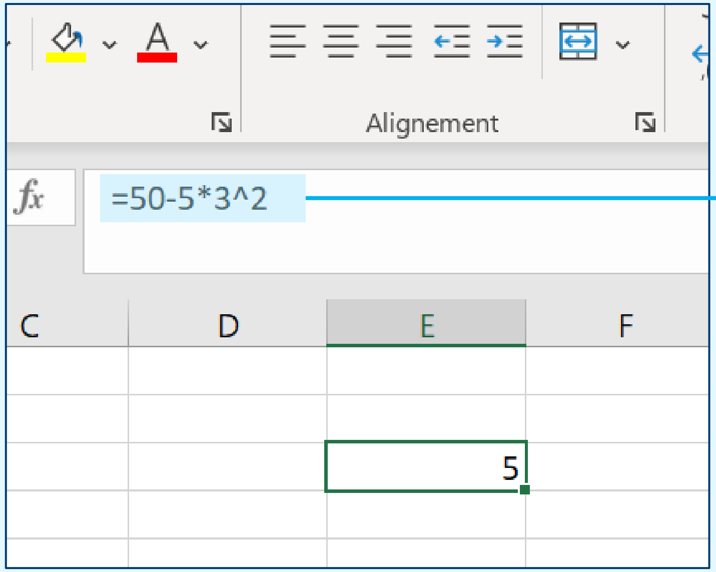
Exemple

$$
\begin{aligned}
2\times(5+2\times(7-4))^2-(16\div(2)^3)-3 &= 2\times(5+2\times 3)^2-(16\div(2)^3)-3\\
&= 2\times(5+6)^2-(16\div(2)^3)-3\\
&= 2\times(11)^2-(16\div(2)^3)-3\\
&= 2\times(121)-(16\div 8)-3\\
&= 2\times(121)-(2)-3\\
&= 242-2-3\\
&= 240-3\\
&= 237
\end{aligned}
$$

3 ORDRE DE PRIORITÉ DES OPÉRATIONS



Saisie dans Excel: $(50 - 5) \times 3^2$



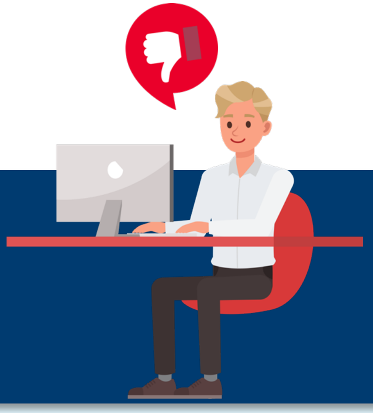
$$50 - 5 \times 3^2$$

$$5 \times 9$$

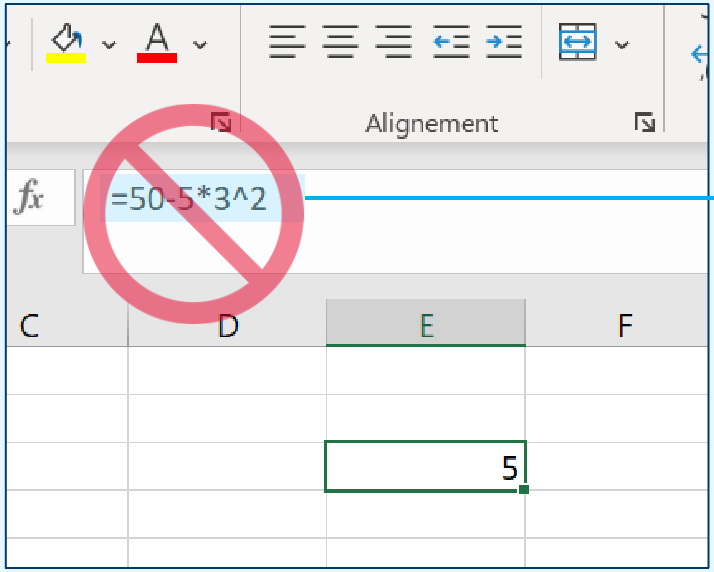
!!!

$$50 - 45 = 5$$

3 ORDRE DE PRIORITÉ DES OPÉRATIONS



Saisie dans Excel: $(50 - 5) \times 3^2$



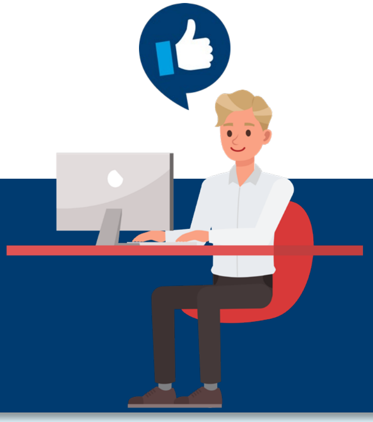
$$50 - \boxed{5 \times \boxed{3^2}}$$

$$5 \times 9$$

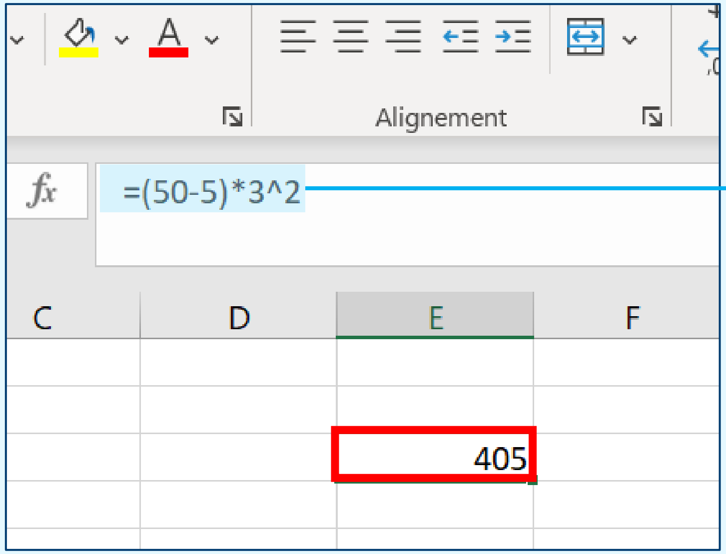
$$50 - \quad 45 \quad = 5$$

!!!

3 ORDRE DE PRIORITÉ DES OPÉRATIONS



Saisie dans Excel: $(50 - 5) \times 3^2$



(50-5)*3^2

405

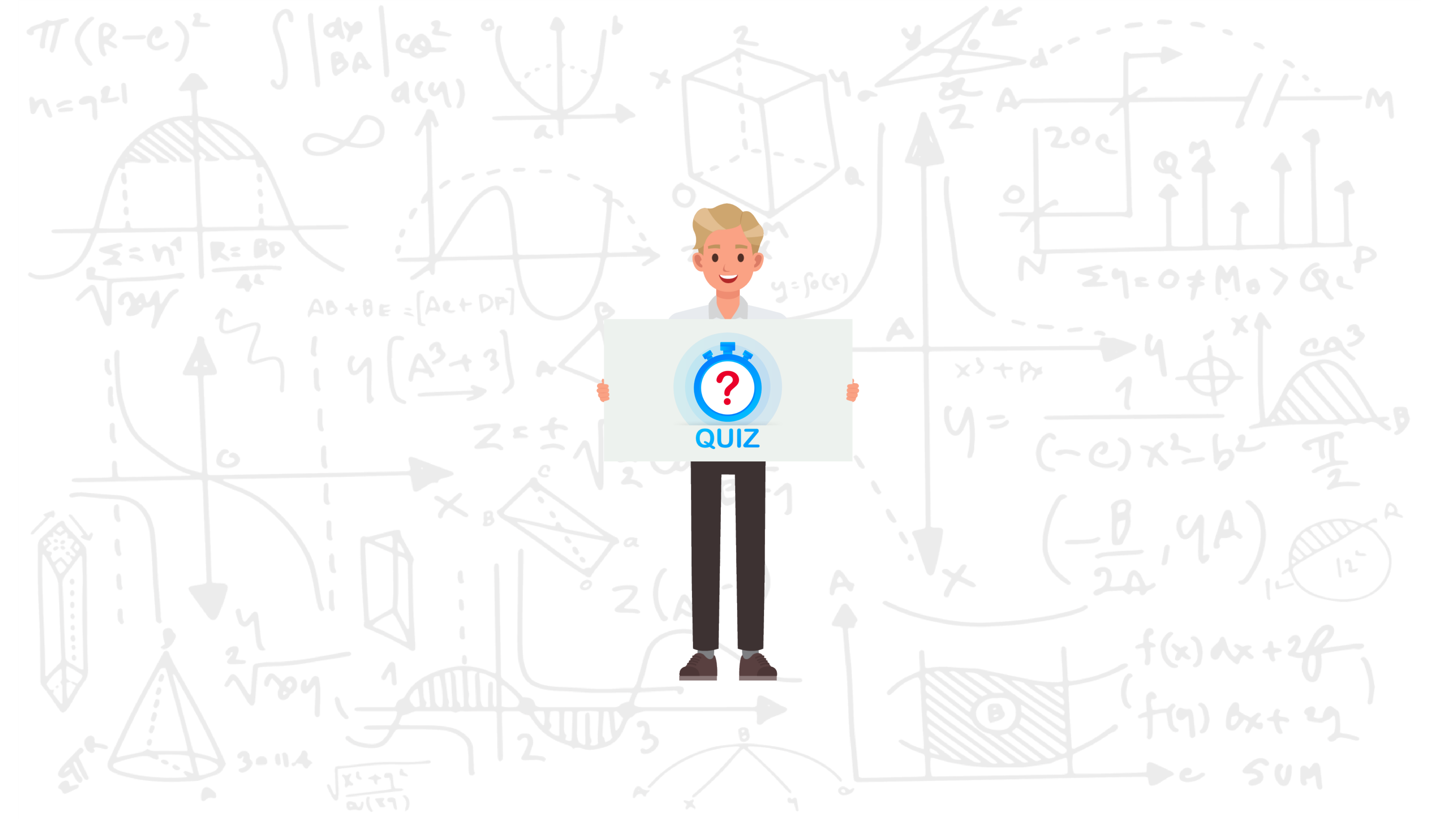
RÉSUMÉ LES EXPOSANTS RATIONNELS

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$,

1	Résoudre $x^n = a$: faire attention au signe de a et à la parité de n.
2	Si n est pair, $\sqrt[n]{a}$ est définie si et seulement si $a \geq 0$.
3	Si n est pair, tout nombre réel positif a possède deux racines $n^{ièmes}$ dans $\mathbb{R}$. La racine positive est appelée la racine principale, notée $\sqrt[n]{a}$.
4	Si n est impair, $\sqrt[n]{a}$ est toujours définie, et l'équation $x^n = a$ a toujours une solution.
5	Racines $n^{ième}$ et les exposants rationnels : $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.
6	L'évaluation des exposants est prioritaire sur les multiplications/divisions puis sur les additions /soustractions.

RÉFÉRENCES

- Michèle Gingras, **Mathématique d'appoint**, 5e édition, 2015, Éditeur Chenelière éducation.
- Josée Hamel, **Mise à niveau Mathématique**, 2e édition, 2017, Éditeur Pearson (ERPI)


QUIZ

HEC MONTRÉAL

DÉPARTEMENT DE SCIENCES DE LA DÉCISION

CENTRE D'AIDE EN MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE

2020

Direction de l'apprentissage et de l'innovation pédagogique
Service de l'audiovisuel