HEC MONTRÉAL

DÉPARTEMENT DE SCIENCES DE LA DÉCISION
FATIHA KACHER – Maître d'enseignement
CENTRE D'AIDE EN MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE
MICHEL KEOULA – Coordonnateur

MATHÉMATIQUES D'APPOINT

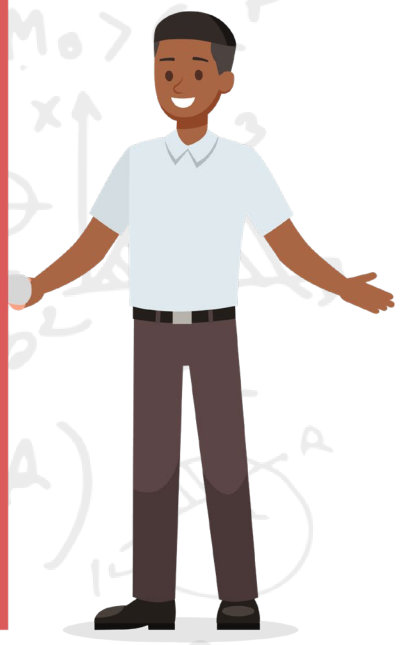
FACTORISATION DE POLYNÔMES

FACTORISATION DE POLYNÔMES

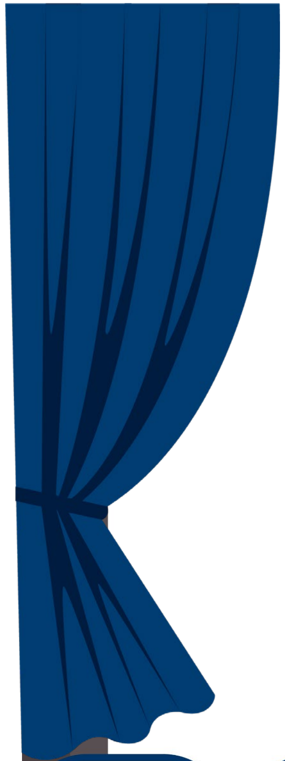
FACTORISATION DE POLYNÔMES

Factoriser des polynômes.

Utiliser efficacement les identités remarquables.



1 DÉFINITIONS EXEMPLE INTRODUCTIF

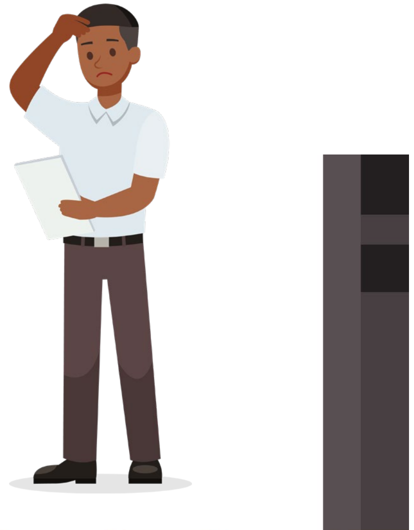


Capacité de la salle : 100 places

Prix du billet : 15 $ s'il vend 100 billets

Pour toute augmentation de 1$ du prix du billet → Il y a aura une diminution des ventes de 2 billets.

Revenu = ?



1 DÉFINITIONS | EXEMPLE INTRODUCTIF

100 places

15 $/chaque

+1$ → - TICKET

Revenu = ?

Revenu = Prix du billet × Demande

Variable (inconnue) x : Le nombre d'augmentations de 1 $ du prix initial d'un billet

$$\textbf{Revenu} = (15 + x)(100 - 2x)$$ Forme factorisée

$$= 1500 + 70x - 2x^2$$ Forme développée

1 DÉFINITIONS

$$2 \times 5 = 10$$

Facteur

Produit

$$(15 + x)(100 - 2x) = -2x^2 + 70x + 1500$$

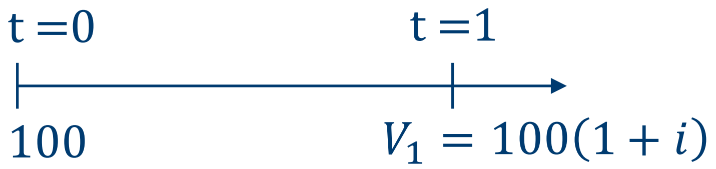
1 DÉFINITIONS

POLYNÔME	FORME FACTORISÉE DU POLYNÔME
Revenu $= -2x^2 + 70x + 1500$	$= (15 + x)(100 - 2x)$
$P = 2x^2 + 4xy$	$= 2x(x + 2y)$
$Q = x^2 + 2x + 1$	$= (x + 1)^2$
$R = 5 - x^2$	$= \left(\sqrt{5} - x\right)\left(\sqrt{5} + x\right)$

2 TECHNIQUES DE FACTORISATION | MISE EN ÉVIDENCE SIMPLE

$$V_1 = 100 + 100\,i$$

$$V_1 = 100(1 + i)$$



La mise en évidence simple :

$$ab + ac = a(b + c)$$

2 TECHNIQUES DE FACTORISATION MISE EN ÉVIDENCE SIMPLE

Exemple :

Factoriser, si possible, le polynôme :

$$P = \underbrace{2x^2} + \underbrace{4xy} = \underbrace{2x(x)} + \underbrace{2x(2y)}$$

$$= 2x(x + 2y)$$

Forme factorisée du polynôme

La mise en évidence simple :

$$ab + ac = a(b + c)$$

$$2x(x + 2y) = 2x(x) + 2x(2y)$$

$$= 2x^2 + 4xy = P$$

Vérification : développer la forme factorisée du polynôme P

2 TECHNIQUES DE FACTORISATION — MISE EN ÉVIDENCE DOUBLE

Exemple :

Factoriser, si possible, le polynôme :

$$P = (10x^3 + 5x^2) + (4x + 2)$$

$$= \underbrace{5x^2(2x + 1)} + \underbrace{2(2x + 1)}$$

$$= (2x + 1)\ (5x^2 + 2)$$

Forme factorisée du polynôme P

La mise en évidence double :

$$ac + bc + ad + bd = c(a + b) + d(a + b)$$

$$= (a + b)(c + d)$$

2 TECHNIQUES DE FACTORISATION | MISE EN ÉVIDENCE DOUBLE

Exemple :

$$P = (10x^3 + 5x^2) + (4x + 2)$$

$$= (2x + 1)(5x^2 + 2)$$

$$Q = 10x^3 - 5x^2 - 4x + 2$$

$$= (10x^3 - 5x^2) - (4x - 2)$$

$$= (2x - 1)(5x^2 - 2)$$

2 TECHNIQUES DE FACTORISATION — IDENTITÉS REMARQUABLES

La différence de carrés : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

La différence de cubes : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

La somme de cubes : $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

DIFFÉRENCE DE CARRÉS

La différence de carrés : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Exemple :

Factoriser, si possible, le polynôme :

$P = 4x^2 - 9y^2$

$a = 2x$

$= (2x)^2 - (3y)^2$

$b = 3y$

$= (2x - 3y)(2x + 3y)$

2 TECHNIQUES DE FACTORISATION DIFFÉRENCE DE CUBES

La différence de cubes : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Exemple :

Factoriser, si possible, le polynôme :

$P = 8x^3 - 27$

$a = 2x$

$= (2x)^3 - (3)^3$

$b = 3$

$= (2x - 3)\left((2x)^2 + (2x)3 + 3^2\right)$

$= (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$

2 TECHNIQUES DE FACTORISATION SOMME DE CUBES

La somme de cubes : $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Exemple :

Factoriser, si possible, le polynôme :

$P = 8x^3 + 27$

$a = 2x$

$= (2x)^3 + (3)^3$

$b = 3$

$= (2x+3)\left((2x)^2 - (2x)3 + 3^2\right)$

$= (2x+3)(4x^2 - 6x + 9)$

FACTORISATION D'UN POLYNÔME DE DEGRÉ 2 À UNE VARIABLE :

Soit $P = ax^2 + bx + c$: un polynôme en x de degré 2.

Discriminant de P

$\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta < 0$

alors P est **irréductible** dans $\mathbb{R}$
(on ne peut pas le décomposer en un produit de polynômes à coefficients réels de degré 1).

Si $\Delta = 0$

alors P admet une racine réelle double $r_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et $P = a(x - r_0)^2$

Si $\Delta > 0$

alors P admet deux racines réelles : $r_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

et $P = a(x - r_1)(x - r_2)$

Exemple :

Factoriser, si possible, le polynôme :

$$P = x^2 + 2x + 2 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4 - 8 \\ &= -4 < 0 \end{aligned}$$

P est **irréductible** dans $\mathbb{R}$ (on ne peut pas le décomposer en un produit de polynômes à coefficients réels de degré 1).

Exemple :

Factoriser, si possible, le polynôme :

$$P = x^2 + 9$$

$a = 1$

$b = 0$

$c = 9$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 0 - 36 \\ &= -36 < 0 \end{aligned}$$

P est **irréductible** dans $\mathbb{R}$.

REMARQUE :

- $a^2 + b^2$ est appelée « somme de carrés ».
- Si un polynôme P est une somme de carrés, alors P est **irréductible** dans $\mathbb{R}$.

Exemple :

Factoriser, si possible, le polynôme :

$P = x^2 + 2x + 1$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

P admet une racine réelle double $r_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$

$$\begin{aligned} P &= a(x - r_0)^2 \\ &= 1\big(x - (-1)\big)^2 \\ &= (x+1)^2 \end{aligned}$$

Exemple :

Factoriser, si possible, le polynôme :

$$P = -2x^2 + x + 3 \quad \longrightarrow \quad a = -2,\quad b = 1,\quad c = 3$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1 + 24 \\ &= 25 > 0 \quad et\ \sqrt{\Delta} = 5\end{aligned}$$

P admet deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-5}{-4} = \frac{3}{2} \quad et\ r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+5}{-4} = -1$$

$$\begin{aligned}P &= a(x - r_1)(x - r_2) \\ &= -2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 1)\end{aligned}$$

2 TECHNIQUES DE FACTORISATION AUTRES CAS

Exemple :

Factoriser, si possible, le polynôme :

$$P = a^3b^2 + a^2b = a^2b\,(ab + 1)$$

Vérification : $a^2b\,(ab + 1) = a^3b^2 + a^2b$

2 TECHNIQUES DE FACTORISATION AUTRES CAS

Exemple :

Factoriser, si possible, le polynôme :

$$P = (x+1)^3(2x+1)^2 + (x+1)^2(2x+1) = (x+1)^2(2x+1)\big((x+1)(2x+1)+1\big)$$

$$= (x+1)^2(2x+1)(2x^2+3x+1+1)$$

$$= (x+1)^2(2x+1)(2x^2+3x+2)$$

Remarque :

$$P = \underbrace{(x+1)^3(2x+1)^2}_{} + \underbrace{(x+1)^2(2x+1)}_{}$$

$$= a^3b^2 + a^2b$$

$$= a^2b(ab+1)$$

$a = (x+1)$

$b = (2x+1)$

Exemple :

Factoriser, si possible, le polynôme :

$$P = (x+1)^3(2x+1)^2 - 3(x+1)^2(2x+1) = (x+1)^2(2x+1)\big((x+1)(2x+1) - 3\big)$$

$$= (x+1)^2(2x+1)(2x^2+1+3x-3)$$

$$= (x+1)^2(2x+1)(2x^2+3x-2)$$

$$= (x+1)^2(2x+1)(2x-1)(x+2)$$

Exemple :

Factoriser, si possible, le polynôme :

$$P = 2(x+3)^5(2x-1)^4 - 3(x+3)^4(2x-1)^5 = (x+3)^4(2x-1)^4\left(2(x+3) - 3(2x-1)\right)$$

$$= (x+3)^4(2x-1)^4(2x+6-6x+3)$$

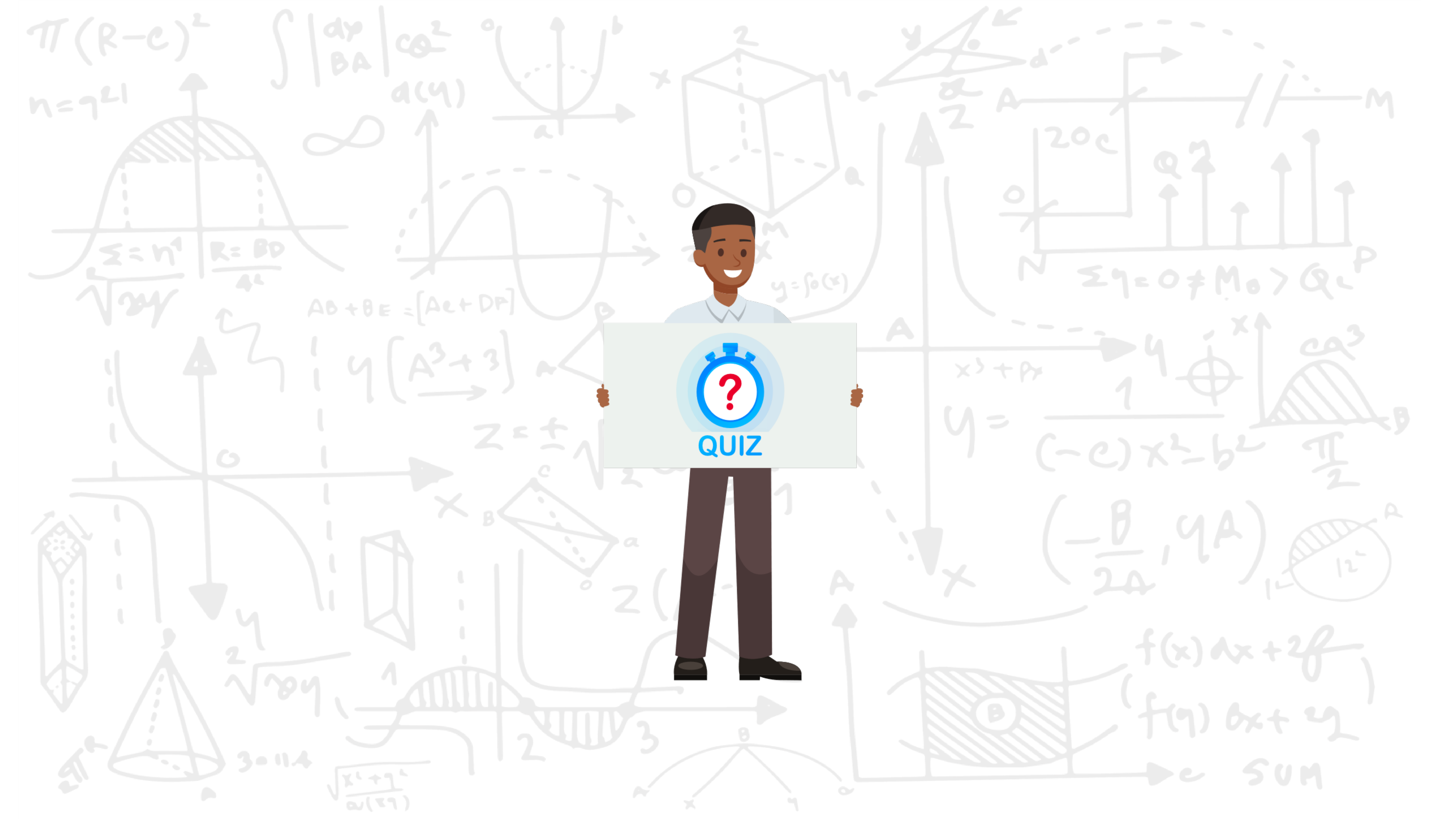
$$= (x+3)^4(2x-1)^4(-4x+9)$$

RÉSUMÉ TECHNIQUES DE FACTORISATION

1	Mise en évidence simple : $ab + ac = a(b + c)$
2	Mise en évidence double : $\begin{aligned} ac + bc + ad + bd &= c(a + b) + d(a + b) \\ &= (a + b)(c + d) \end{aligned}$
3	Factoriser un polynôme de degré deux.
4	Factoriser une somme ou une différence de cubes.

RÉFÉRENCES

- Michèle Gingras, **Mathématique d'appoint**, 5e édition, 2015, Éditeur Chenelière éducation.
- Josée Hamel, **Mise à niveau Mathématique**, 2e édition, 2017, Éditeur Pearson (ERPI)


QUIZ

HEC MONTRÉAL

DÉPARTEMENT DE SCIENCES DE LA DÉCISION

CENTRE D'AIDE EN MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE

2021

Direction de l'apprentissage et de l'innovation pédagogique

Service de l'audiovisuel