

## FACTORISATION DE POLYNÔMES



# FACTORISATION DE POLYNÔMES

- Définitions
- Techniques de factorisation

# Définitions

## Exemple 1

- Capacité de la salle de spectacle : 100 places
- Prix du billet : 15 \$ si on vend 100 billets
- Pour toute augmentation de 1 \$ du prix du billet, il y aura une diminution des ventes de 2 billets.

Variable (inconnue)

$x$  : Le nombre d'augmentation de 1 \$ du prix initial d'un billet



- **Revenu = Prix du billet × Demande**

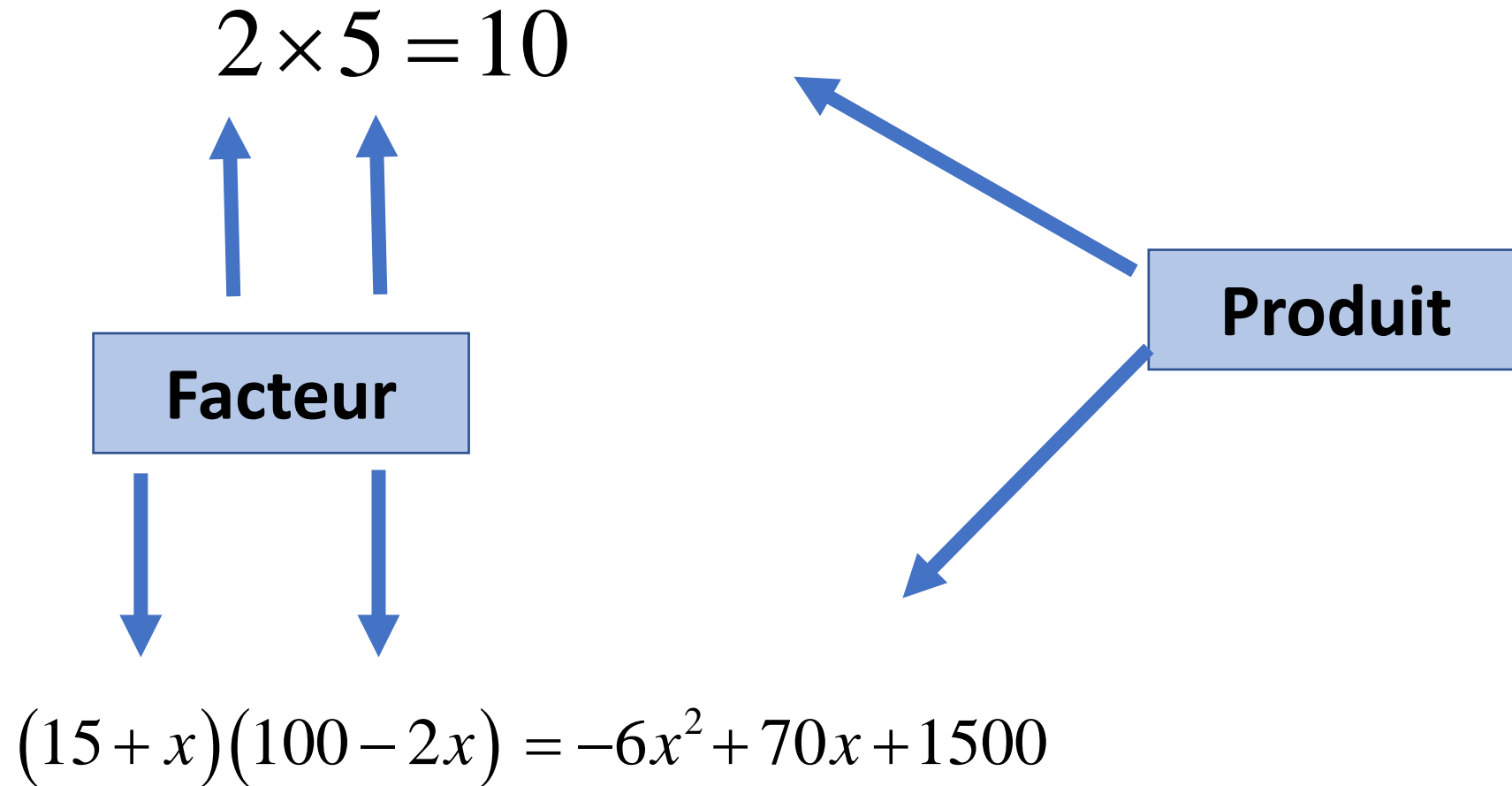
$$\text{Revenu} = (15 + x)(100 - 2x)$$

$$= 1500 + 70x - 2x^2$$

Forme factorisée

Forme développée

# Définitions



# Définitions

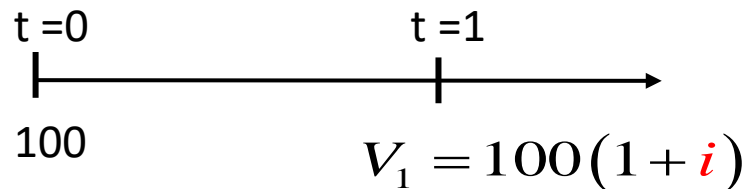
Polynôme	Forme factorisée du polynôme
Revenu = $-6x^2 + 70x + 1500$	$= (15 + x)(100 - 2x)$
$P = 2x^2 + 4xy$	$= 2x(x + 2y)$
$Q = x^2 + 2x + 1$	$= (x + 1)^2$
$R = 5 - x^2$	$= (\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x)$

# Techniques de factorisation : mise en évidence simple

Reprenons l'exemple de la valeur acquise au bout d'un an par un placement de 100 dollars à un taux d'intérêt **annuel**  $i$ .

$$V_1 = 100 + 100i$$

$$V_1 = 100(1 + i)$$



**La mise en évidence simple**

$$ab + ac = a(b + c)$$

# Techniques de factorisation : mise en évidence simple

## Exemple 2

Factoriser, si possible, le polynôme :

$$P = \underbrace{2x^2} + \underbrace{4xy} = \underbrace{2x(x)} + \underbrace{2x(2y)}$$

$$= 2x(x + 2y)$$

$$2x(x + 2y) = 2x(x) + 2x(2y)$$

$$2x^2 + 4xy = P$$

La mise en évidence simple

$$ab + ac = a(b + c)$$

forme factorisée du polynôme

Vérification : développer la forme factorisée du polynôme P

# Techniques de factorisation : mise en évidence double

## Exemple 3

$$\begin{aligned} P &= (10x^3 + 5x^2) + (4x + 2) \\ &= \underbrace{5x^2(2x+1)} + \underbrace{2(2x+1)} \\ &= (2x+1)(5x^2+2) \end{aligned}$$

La mise en évidence **double**

$$\begin{aligned} ac + bc + ad + bd &= c(a+b) + d(a+b) \\ &= (a+b)(c+d) \end{aligned}$$

forme factorisée du polynôme P



# Techniques de factorisation : mise en évidence double

## Exemple 4



Mise en garde : utilisation des parenthèses **après un signe « - »**

$$\begin{aligned} P &= (10x^3 + 5x^2) + (4x + 2) \\ &= (2x + 1)(5x^2 + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= 10x^3 - 5x^2 - 4x + 2 \\ &= (10x^3 - 5x^2) - (4x - 2) \\ &= (2x - 1)(5x^2 - 2) \end{aligned}$$

# Techniques de factorisation : identités remarquables

➤ La différence de carrés :  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

➤ La différence de cubes :  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

➤ La somme de cubes :  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

# Techniques de factorisation : différence de carrés

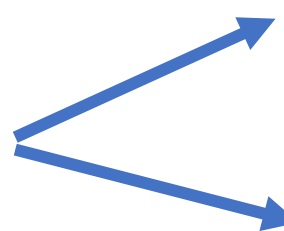
## Exemple 5

Factoriser, si possible, le polynôme :

$$P = 4x^2 - 9y^2$$

La différence de carrés

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$= (2x)^2 - (3y)^2$$

$$a = 2x$$
$$b = 3y$$

$$= (2x - 3y)(2x + 3y)$$

# Techniques de factorisation : différence de cubes

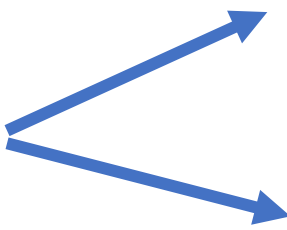
## Exemple 6

Factoriser, si possible, le polynôme :

$$P = 8x^3 - 27$$

La différence de cubes

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= (2x)^3 - (3)^3$$

$$a = 2x$$
$$b = 3$$

$$= (2x - 3) \left( (2x)^2 + (2x)3 + 3^2 \right)$$

$$= (2x - 3) (4x^2 + 6x + 9)$$

# Techniques de factorisation : somme de cubes

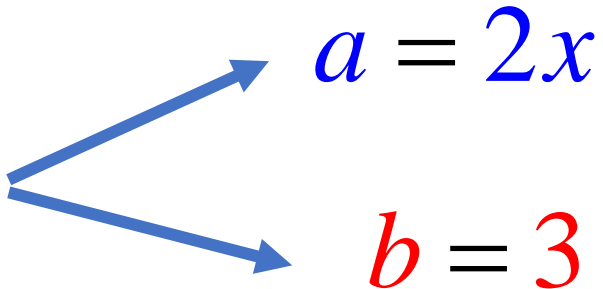
## Exemple 7

Factoriser, si possible, le polynôme :

$$P = 8x^3 + 27$$

La somme de cubes

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$= (2x)^3 + (3)^3$$


$a = 2x$   
 $b = 3$

$$= (2x + 3) \left( (2x)^2 - (2x)3 + 3^2 \right)$$

$$= (2x + 3) (4x^2 - 6x + 9)$$

# Techniques de factorisation : factorisation d'un polynôme de degré 2

## Factorisation d'un polynôme de degré 2 à une variable

Soit  $P = ax^2 + bx + c$  : un polynôme en  $x$  de degré 2.

Discriminant de  $P$

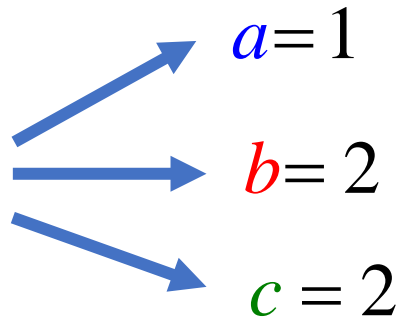
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si  $\Delta < 0$ , alors  $P$  est **irréductible** (ne peut pas se décomposer en un produit de polynômes à coefficients réels de degré 1).
- Si  $\Delta = 0$ , alors  $P$  admet une racine réelle double  $r_0 = -\frac{b}{2a}$  et  $P = a(x - r_0)^2$
- Si  $\Delta > 0$ , alors  $P$  admet deux racines réelles :  $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$   
et  $P = a(x - r_1)(x - r_2)$

# Techniques de factorisation : factorisation d'un polynôme de degré 2

## Exemple 8

Factoriser, si possible,  $P = x^2 + 2x + 2$



$a=1$   
 $b=2$   
 $c=2$

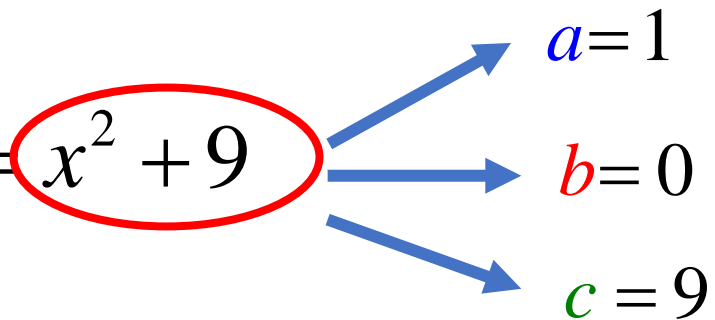
$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4 - 8 \\ &= -4 < 0\end{aligned}$$

- $P$  est **irréductible** (ne peut pas se décomposer en un produit de polynômes à coefficients réels de degré 1).

# Techniques de factorisation : factorisation d'un polynôme de degré 2

## Exemple 9

Factoriser, si possible,  $P = x^2 + 9$



$a = 1$   
 $b = 0$   
 $c = 9$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 0 - 36$$

$$= -36 < 0$$

$P$  est irréductible

### Remarque

- $a^2 + b^2$  est appelée « somme de carrés ».
- Si un polynôme  $P$  est une somme de carrés, alors  $P$  est **irréductible**.



# Techniques de factorisation : factorisation d'un polynôme de degré 2

## Exemple 10

Factoriser, si possible,

$$P = x^2 + 2x + 1$$

$a=1$   
 $b=2$   
 $c=1$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 4 - 4$$

$$= 0$$

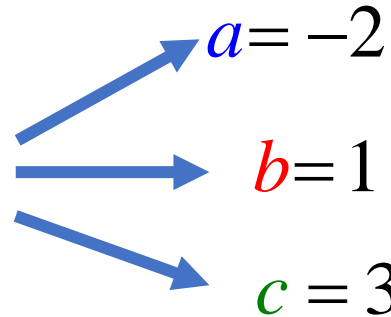
- $P$  admet une racine réelle double  $r_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$
- $P = a(x - r_0)^2$   
 $= 1(x - (-1))^2$   
 $= (x + 1)^2$

# Techniques de factorisation : factorisation d'un polynôme de degré 2

## Exemple 11

Factoriser, si possible,

$$P = -2x^2 + x + 3$$



$a = -2$   
 $b = 1$   
 $c = 3$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 1 + 24$$

$$= 25 > 0 \text{ et } \sqrt{\Delta} = 5$$

■  $P$  admet deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 5}{-4} = \frac{3}{2} \text{ et } r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{-4} = -1$$


$$P = a(x - r_1)(x - r_2)$$

$$= -2 \left( x - \frac{3}{2} \right) (x + 1)$$


# Techniques de factorisation : autres cas

## Exemple 12

Factoriser, si possible,

$$P = a^3b^2 + a^2b = a^2b( ab + 1 )$$


Vérification

$$a^2b( ab + 1 ) = a^3b^2 + a^2b$$


# Autres cas de factorisation

## Exemple 13

Factoriser, si possible,

$$\begin{aligned} P &= \underbrace{(x+1)^3}_{\longleftrightarrow} \underbrace{(2x+1)^2}_{\longleftrightarrow} + \underbrace{(x+1)^2}_{\longleftrightarrow} \underbrace{(2x+1)}_{\longleftrightarrow} = (x+1)^2 (2x+1) \left( \underbrace{(x+1)}_{\uparrow} \underbrace{(2x+1)}_{\uparrow} + \underbrace{1}_{\uparrow} \right) \\ &= (x+1)^2 (2x+1) (2x^2 + 3x + 1 + 1) \\ &= (x+1)^2 (2x+1) (2x^2 + 3x + 2) \end{aligned}$$

Remarque

$$\begin{aligned} P &= \underbrace{(x+1)^3}_{\downarrow} \underbrace{(2x+1)^2}_{\downarrow} + \underbrace{(x+1)^2}_{\downarrow} \underbrace{(2x+1)}_{\downarrow} \\ &= a^3 b^2 + a^2 b = a^2 b (ab + 1) \end{aligned}$$

$a = (x+1)$   
 $b = (2x+1)$

# Autres cas de factorisation

## Exemple 14

Factoriser, si possible,

$$\begin{aligned} P &= \underbrace{(x+1)^3}_{\longleftrightarrow} \underbrace{(2x+1)^2}_{\longleftrightarrow} - 3 \underbrace{(x+1)^2}_{\longleftrightarrow} \underbrace{(2x+1)}_{\longleftrightarrow} = \underbrace{(x+1)^2}_{\longleftrightarrow} \underbrace{(2x+1)}_{\longleftrightarrow} \underbrace{((2x+1)(x+1) - 3)}_{\substack{\longleftarrow \uparrow \\ \uparrow \longrightarrow}} \\ &= (x+1)^2 (2x+1) (2x^2 + 1 + 3x - 3) \\ &= (x+1)^2 (2x+1) (2x^2 + 3x - 2) \\ &= (x+1)^2 (2x+1) (2x-1)(x+2) \end{aligned}$$

# Autres cas de factorisation

## Exemple 15

Factoriser, si possible,

$$\begin{aligned} P &= 2(x+3)^5 (2x-1)^4 - 3(x+3)^4 (2x-1)^5 \\ &= (x+3)^4 (2x-1)^4 (2(x+3) - 3(2x-1)) \\ &= (x+3)^4 (2x-1)^4 (2x+6-6x+3) \\ &= (x+3)^4 (2x-1)^4 (-4x+9) \end{aligned}$$

# Résumé

## Techniques de factorisation

- Mise en évidence simple :  $ab + ac = a(b + c)$
- Mise en évidence double :  $ac + bc + ad + bd = c(a + b) + d(a + b)$
- Factoriser un polynôme de degré deux
- Factoriser une somme ou **une** différence de cubes

## Références

- Michèle Gingras, Mathématique d'appoint, 5<sup>e</sup> édition, 2015, Éditeur Chenelière éducation
- Josée Hamel, Mise à niveau Mathématique, 2<sup>e</sup> édition, 2017, Éditeur Pearson (ERPI)