HEC MONTRÉAL

Résolution d'inéquations linéaires à une variable

Résolution d’inéquations linéaires à une variable

- Définition d’une inéquation
- Propriétés d’une inéquation
- Résolution d’une inéquation linéaire à une variable
- Approche Graphique

Définition d'une inéquation

Exemple 1

Aqua-Joie

- **Nombre d'heures officielles par semaine : 40 h**
- **Taux horaire : 16 $/h**
- **1 heure supplémentaire : $1,5 \times 16$**
- **Objectif : Salaire ≥ 760 $**

?

Variable (inconnue)

x : Nombre d'heures supplémentaires

Salaire $= (\text{salaire de 40 heures}) + (\text{salaire des heures supplémentaires})$

$$= 40 \times 16 \quad + \quad 1,5(16)\,x$$

$$\text{Salaire} = 640 + 24x$$

Polynôme à une variable de degré 1

Pour quelles valeurs de x : $640 + 24x \geq 760$?

Résoudre : Inéquation linéaire à une variable

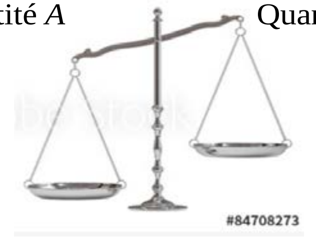
Définition d'une inéquation

$$Domaine : x \in [0, +\infty[$$

Une inéquation est une **inégalité** entre deux quantités algébriques.

$$640 + 24x \geq 760 \ ?$$

$$\underbrace{A}_{\text{Quantité } A} \quad \geq \quad \underbrace{B}_{\text{Quantité } B}$$



Le domaine d'une inéquation est l'ensemble des valeurs qu'on peut attribuer à sa variable.

Ensemble solution : l'ensemble des valeurs de la variable (ou des variables) qui transforment l'inéquation en **une inégalité vraie**.

On note souvent cet ensemble par S.

Résoudre une inéquation

Inéquations équivalentes : deux inéquations sont dites équivalentes si elles ont le même **ensemble solution**.

Propriétés d’une inéquation

Propriétés des inéquations (inéquations équivalentes) :

Soit A et B deux expressions mathématiques et $C \in \mathbb{R}$.

1) Si $A \leq B$ alors $A + C \leq B + C$

alors $A - C \leq B - C$

2) Si $A \leq B$, et $C > 0$ alors $\begin{cases} AC \leq BC \\ \dfrac{A}{C} \leq \dfrac{B}{C} \end{cases}$

3) Si $A \leq B$, et $C < 0$ alors $\begin{cases} AC \geq BC \\ \dfrac{A}{C} \geq \dfrac{B}{C} \end{cases}$

Remarque

Ces propriétés sont aussi valables si on remplace les symboles $\leq$ par des symboles $<$, $\geq$ et $>$.

Inéquation linéaire (du premier degré) à une variable

Inéquation linéaire à une variable : inéquation à une seule variable où l'exposant de cette variable est égal à 1, et que la variable n'apparaît ni au dénominateur ni sous un radical.

On peut toujours ramener une inéquation linéaire à une variable, à l'une des formes suivantes :

$$ax+b \leq 0 \ , \ ax+b \geq 0 \ , \ ax+b < 0 \ , \ ax+b > 0$$

où x est la variable (l'inconnue), $a \neq 0, \ b \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{x}+1 \geq 1 \qquad \sqrt{x}-1 < 2$$

Inéquation linéaire (du premier degré) à une variable

Exemple 1

Aqua-Joie

- **Nombre d'heures officielles par semaine : 40 h**
- **Taux horaire : 16 \$/h**
- **1 heure supplémentaire :** $\mathbf{1,5 \times 16}$
- **Objectif : Salaire** ≥ 760 \$

?

Variable (inconnue)

x **: Nombre d'heures supplémentaires**

Pour quelles valeurs de x **:** $\mathbf{640 + 24x \geq 760}$?

$$640 + 24x \,\Big|_{x=3} = 640 + 24(3)$$
$$= 712 \quad < 760$$

$3 \notin S$

$$640 + 24x \,\Big|_{x=6} = 640 + 24(6)$$
$$= 784 \quad > 760$$

$6 \in S$

Résolution d'une inéquation linéaire à une variable

Exemple 1

Aqua-Joie

- **Nombre d'heures officielles par semaine : 40 h**
- **Taux horaire : 16 $/h**
- **1 heure supplémentaire :** $\mathbf{1,5 \times 16}$
- **Objectif : Salaire** $\geq$ **760 $**

?

Variable (inconnue)

x **: Nombre d'heures supplémentaires**

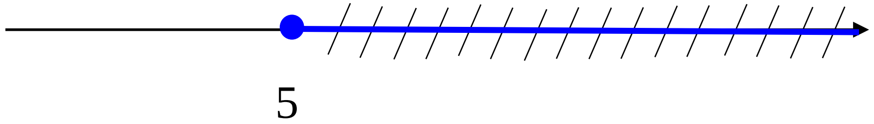
Résoudre : $\mathbf{640 + 24x \geq 760}$?

$$640 + 24x - 640 \geq 760 - 640$$

$$\frac{24}{24}x \geq \frac{120}{24}$$

$$x \geq 5$$

$S = [5\ ,\ \infty[$



Résolution d’une inéquation linéaire à une variable

Exemple 2 Résoudre l’inéquation suivante : $\frac{1}{2}(x-1)-3 \leq 2(x+1)$

$$\frac{1}{2}(x-1)-3 \leq 2(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1)-3+3 \leq 2(x+1)+3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1) \leq 2(x+1)+3$$

$$\Leftrightarrow 2\times\frac{1}{2}(x-1) \leq 2\times\left[2(x+1)+3\right]$$

$$\Leftrightarrow x-1 \leq 4(x+1)+6$$

$$\Leftrightarrow x-1 \leq 4x+10$$

$$\Leftrightarrow x-1+1 \leq 4x+10+1$$

$$\Leftrightarrow x-4x \leq 4x+11-4x$$

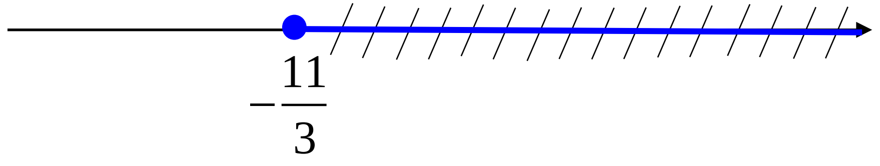
$$\frac{1}{2}(x-1)-3 \leq 2(x+1) \Leftrightarrow -3x \leq 11$$

Division par un nombre négatif
Inverser le sens de l’inégalité

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{-3}x \geq \frac{11}{-3}$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{11}{3}$$

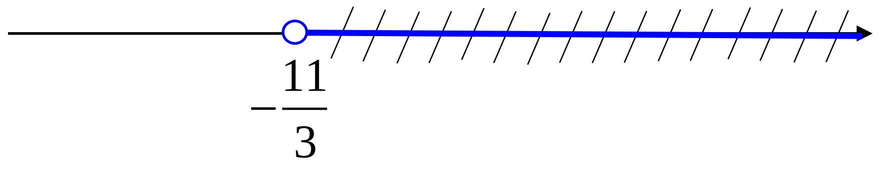
$$S = \left[-\frac{11}{3}\ ,\ \infty\right[$$



Résolution d’une inéquation linéaire à une variable

Exemple 2 Résoudre l’inéquation suivante : $\frac{1}{2}(x-1)-3<2(x+1)$

$$\frac{1}{2}(x-1)-3<2(x+1)\Rightarrow S=\left]-\frac{11}{3}\,,\infty\right[$$



Résolution d'une inéquation linéaire à une variable

Exemple 4 Résoudre l'inéquation suivante :

$$x+3 \leq x+2 \quad \Leftrightarrow x+3-x \leq x+2-x$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq 2$$

L'inégalité est fausse

$$S = \emptyset$$

Résolution d'une inéquation linéaire à une variable

Exemple 5 Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{2x+3}{2} \geq \frac{3x+2}{3} \Leftrightarrow (6)\left(\frac{2x+3}{2}\right) \geq (6)\left(\frac{3x+2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow (3)(2x+3) \geq (2)(3x+2)$$

$$\Leftrightarrow 6x+9 \geq 6x+4$$

$$\Leftrightarrow 9 \geq 4$$

L'inégalité est toujours vraie

$$S = \mathbb{R} =]-\infty\,,\infty[$$

Approche graphique: Résolution d'une inéquation linéaire à une variable

Exemple 6 Résoudre l'inéquation suivante :

$$2x-4 \leq -x+2$$

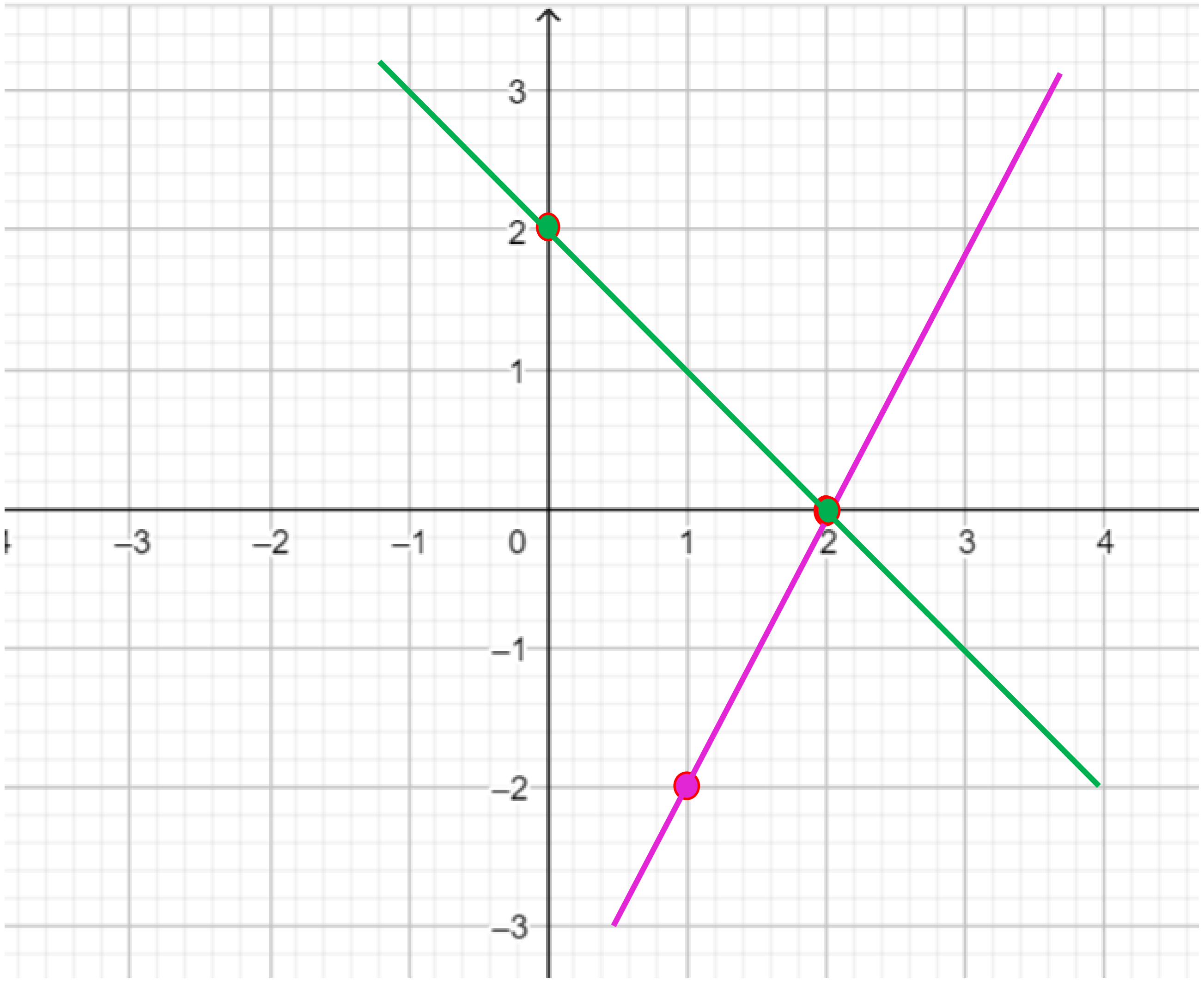
Droite 1 : $y=2x-4$ Droite 2 : $y=-x+2$

Droite 1 : $y=2x-4$

x	$y=2x-4$
2	0
1	- 2

Droite 2 : $y=-x+2$

x	$y=-x+2$
0	2
2	0

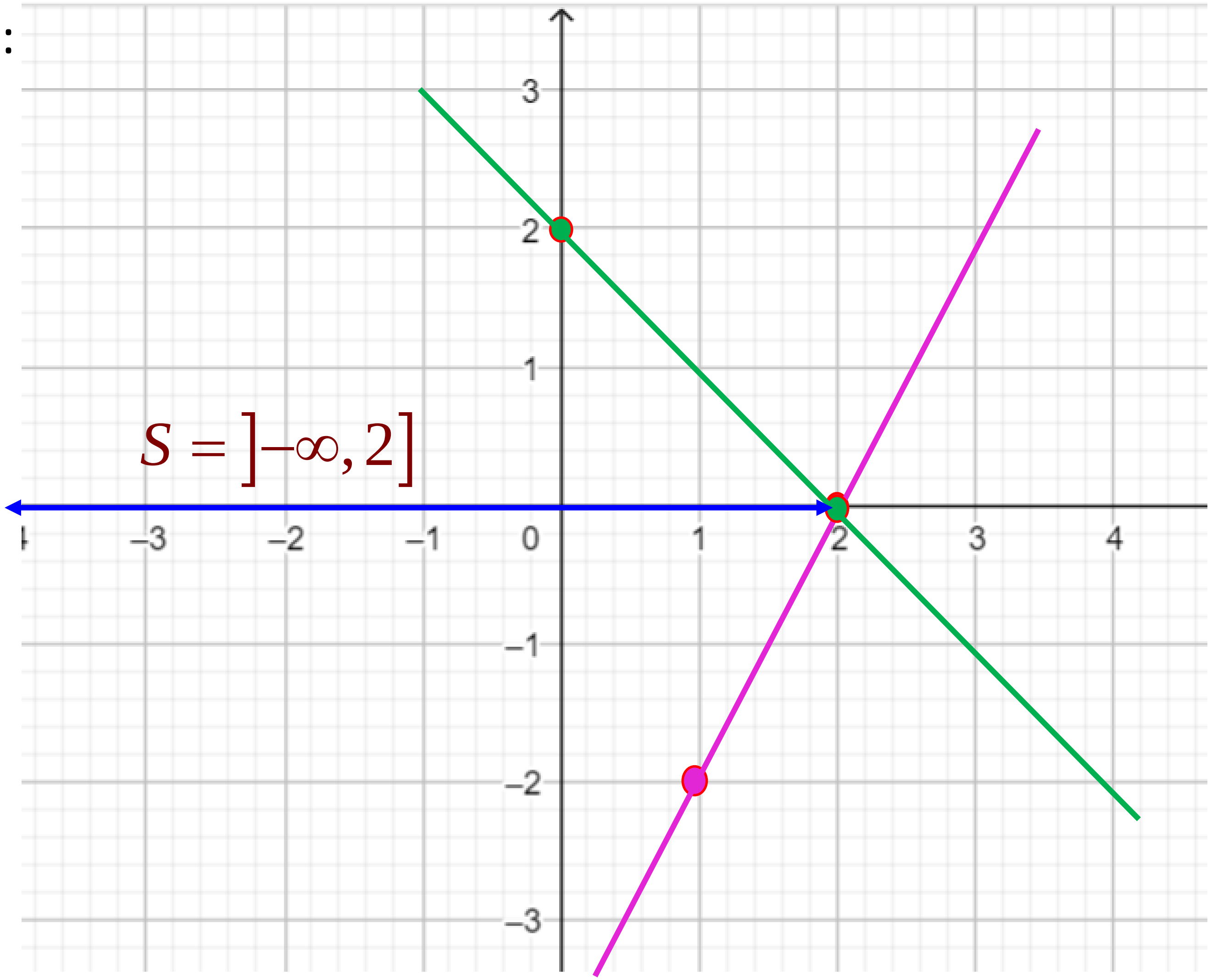


Approche graphique: Résolution d'une inéquation linéaire à une variable

Exemple 6 (suite): Résoudre l'inéquation suivante :

$$2x - 4 \leq -x + 2$$

Droite 1 : $y = 2x - 4$ $\leq$ Droite 2 : $y = -x + 2$



Résumé

- **Inéquation linéaire** à une variable : $ax+b \leq 0$, $ax+b \geq 0$, $ax+b < 0$, $ax+b > 0$

  où x est la variable (l'inconnue), $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$

- **Résoudre une inéquation** linéaire : peut se faire en effectuant des opérations élémentaires $(+\ ,-\ ,\times\ ,\div)$ ou bien graphiquement.

- Lorsqu'on **multiplie ou on divise** une inéquation, par un **nombre négatif** on doit **changer le sens de l'inégalité**.

<u>Références</u>

- Michèle Gingras, Mathématique d'appoint, 5e édition, 2015, Éditeur Chenelière éducation
- Josée Hamel, Mise à niveau Mathématique, 2e édition, 2017, Éditeur Pearson (ERPI)