Résolution d’équations quadratiques à une variable

Résolution d’équations quadratiques à une variable

Résolution d’équations quadratiques à une variable

- Définition d’une équation quadratique
- Résolution d’une équation quadratique à une variable
- Parabole et résolution d’une équation quadratique à une variable

Équation quadratique à une variable

Exemple 1

t =0

i t = 1 i t = 2

100

$V_1 = 100(1+i)$

$V_2 = 100(1+i)^2$

Le montant accumulé après deux années

À quel taux d'intérêt i avez-vous investi si vous avez accumulé 110,25 $?

Résoudre l'équation

$$\boxed{100(1+i)^2 = 110,25}$$

$100(1+i)^2$: polynôme à une variable de **degré deux**

$100(1+i)^2 = 110,25$: équation quadratique à une variable

Équation quadratique à une variable

L'équation quadratique à une variable est une équation à une seule variable, qu'on peut présenter sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où x est la variable (l'inconnue), $a \neq 0$ et $c,\ b \in \mathbb{R}$

$100(1+i)^2 = 110,25 \quad \Leftrightarrow 100\left(i^2 + 2i + 1\right) = 110,25$ — Développement du trinôme

$\Leftrightarrow 100i^2 + 200i + 100 = 110,25$ — Distributivité

$\Leftrightarrow 100i^2 + 200i + 100 - 110,25 = 0$ — Soustraction de 110,25 aux deux membres

$\Leftrightarrow 100i^2 + 200i - 10,25 = 0$

$a = 100$

$b = 200$

$c = -10,25$

Équation quadratique à une variable

$$x^2-1=2x^2+2x+1 \Leftrightarrow -x^2-2x-2=0$$

$$-\sqrt{2}\,x^2-\frac{1}{2}x+1=0$$

$$a=-\sqrt{2}$$

$$b=-\frac{1}{2}$$

$$c=1$$

$$\frac{x+1}{2}=\frac{x^2-2x}{3} \Leftrightarrow 2x^2-3x-5=0$$

Équations quadratiques

$x^2+\sqrt{x}+1=0$ — x est sous un radical

$\dfrac{x}{x^2+1}=x+1$ — x est au dénominateur

$$x^2+2x+3=x^2+3x+5 \Leftrightarrow x+2=0 \quad (a=0)$$

Équations non quadratiques

Résolution d'une équation quadratique à une variable

Résolution à l'aide de la formule quadratique

Discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Soit l'équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet aucune solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet la solution réelle double : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Résolution d'une équation quadratique à une variable

Exemple 1 À quel taux d'intérêt i avez-vous investi si vous avez accumulé 110,25 $ au bout de 2 ans ?

$$100(1+i)^2 = 110{,}25 \iff 100i^2 + 200i - 10{,}25 = 0$$

$a = 100$

$b = 200$

$c = -10{,}25$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 200^2 - 4(100)(-10{,}25)$$

$$\boxed{\Delta = 44100 > 0, \quad \sqrt{\Delta} = 210}$$

$$i_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-200 - \sqrt{44100}}{2(100)}$$

$$i_1 = -2{,}05$$

À rejeter

et

$$i_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-200 + \sqrt{4410}}{2(100)}$$

$$i_2 = 0{,}05$$

Le taux d'intérêt composé sur votre placement est i = 5%

$$S = \{0{,}05\}$$

Résolution d’une équation quadratique à une variable

Résolution par application d’une racine carrée

Exemple 1 À quel taux d’intérêt i avez-vous investi si vous avez accumulé 110,25 \$ après deux années?

$$100(1+i)^2 = 110,25 \quad \Leftrightarrow (1+i)^2 = \frac{110,25}{100}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1+i)^2} = \sqrt{\frac{110,25}{100}}$$

$$\Leftrightarrow |1+i| = 1,05$$

$$\Leftrightarrow 1+i = \pm 1,05$$

Rappel : Propriétés des radicaux

$$x^2 = A \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{A},\ \text{où } A \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{A}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{A}$$

$$i_1 = -1,05 - 1 = -2,05$$

À rejeter

$$i_2 = 1,05 - 1 = 0,05$$

Le taux d’intérêt composé sur votre placement est i = 5%

$$\boxed{S = \{0,05\}}$$

Résolution d'une équation quadratique à une variable

Résolution par application d'une racine carrée

Exemple 2 Résoudre l'équation suivante : $x^2 + 4 = 0$

$$x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$$

Contradiction, car $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0$

$$S = \varnothing$$

Vérification par la formule quadratique

$x^2 + 4 = 0$

$a = 1$

$b = 0$

$c = 4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -16 < 0$$

$$x^2 + B^2 = 0$$

n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Résolution d'une équation quadratique à une variable

Résolution par **Factorisation (différence de carrés)**

Exemple 3 Résoudre l'équation suivante : $(x-1)^2-9=0$

$$\underbrace{(x-1)^2-9}_{A^2 \;-\; B^2}=0 \qquad \Leftrightarrow \left[\underbrace{(x-1)}_{A}-\underbrace{3}_{B}\right]\left[\underbrace{(x-1)}_{A}+\underbrace{3}_{B}\right]=0$$

Rappel :différence de carré

$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x+2)=0$$

Rappel : produit nul

$AB=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ ou } B=0$

$$\Leftrightarrow \ x-4=0 \ \left(\text{ce qui correspond à } x=4\right)$$

$$\text{ou } x+2=0 \ \left(\text{ce qui correspond à } x=-2\right).$$

$S=\{-2,4\}$

Résolution d’une équation quadratique à une variable

Résolution par Factorisation

Exemple 4 Résoudre l’équation suivante : $8x^2+4x=0$

$$8x^2+4x=0 \Leftrightarrow 4x(2x+1)=0$$

Rappel Mise en évidence simple

$$ab+ac=a(b+c)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x=0 \ \left(\text{ce qui correspond à } x=0\right)$$

$$\text{ou } 2x+1=0 \ \left(\text{ce qui correspond à } x=-\frac{1}{2}\right).$$

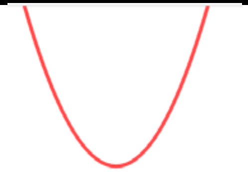
Rappel Produit nul

$$AB=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ ou } B=0$$

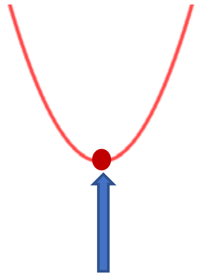
$$S=\left\{-\frac{1}{2},0\right\}$$

Parabole : résolution d'une équation quadratique à une variable

La représentation graphique de $y = ax^2 + bx + c$ Parabole

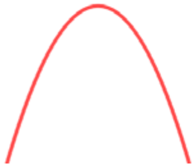


- Le sommet de la parabole : $x_S = -\dfrac{b}{2a}$ et $y_s = ax_s^2 + bx_s + c$

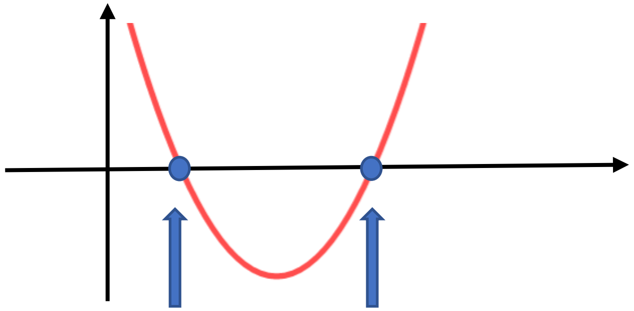


- Si $a > 0$

Si $a < 0$



- Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$



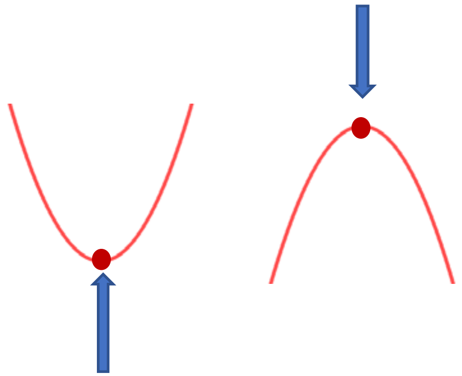
Parabole : résolution d’une équation quadratique à une variable

Exemple 5 $y = x^2 + 4$

$a = 1$

$b = 0$

$c = 4$



- Le sommet de la parabole : $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2} = 0$ et $y_s = 0^2 + 4 = 4$

- $a = 1 > 0$

- $\Delta = -16 < 0$, l’équation $x^2 + 4 = 0$ n’admet aucune solution

La parabole ne coupe pas l’axe des x.

Parabole : résolution d'une équation quadratique à une variable

Suite exemple 5 $y = x^2 + 4, \quad \Delta < 0$

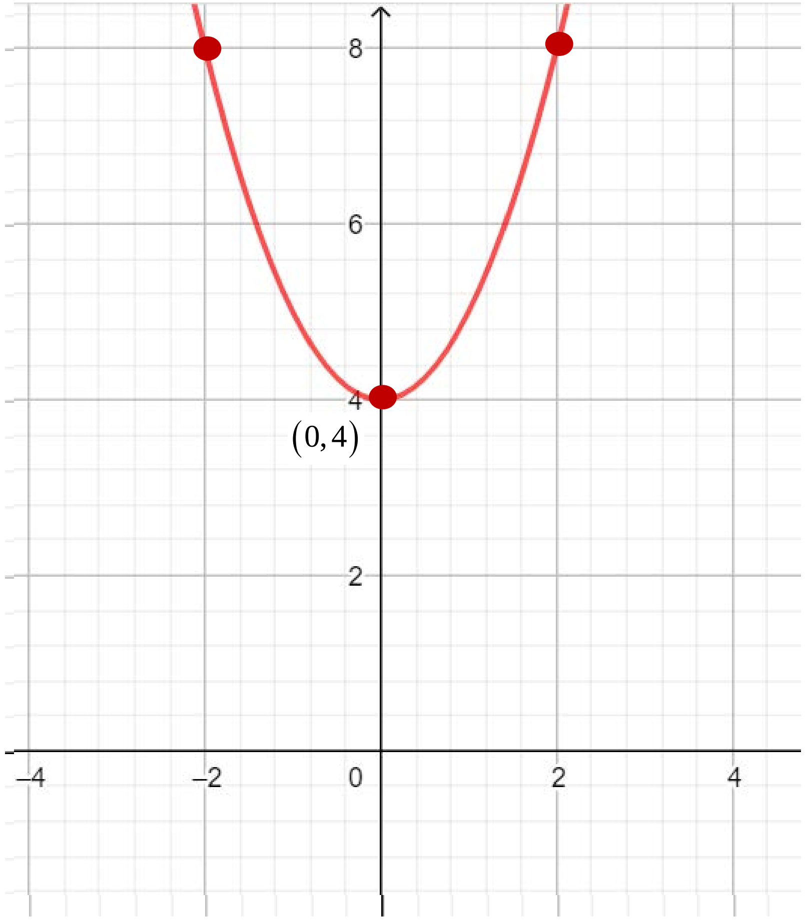
- Le sommet de la parabole : $x_S = 0$ et $y_s = 4$

- La parabole ne coupe pas l'axe des x.

- Trouver deux autres points de la parabole :

x	$y_1 = x^2 + 4$
-2	8
2	8

- $a = 1 > 0$



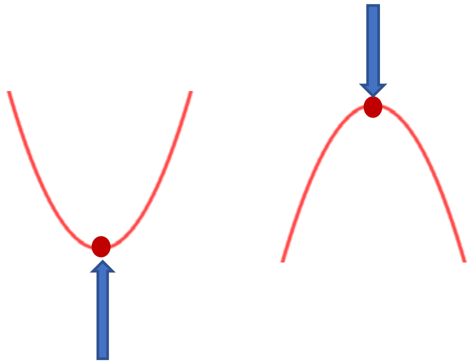
Parabole : résolution d’une équation quadratique à une variable

Exemple 6 $y=-x^2+2x-1$

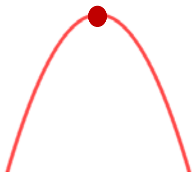
$a=-1$

$b=2$

$c=-1$



- Le sommet de la parabole : $x_S=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2}{-2}=1$ et $y_s=-1^2+2(1)-1=0$
- $a=-1<0$



- $\Delta=0$, l’équation $-x^2+2x-1=0$ admet la solution unique $x_0=-\dfrac{b}{2a}=1$

La parabole touche, sans la couper, l’axe des abscisses en $x = 1$.

Parabole : résolution d'une équation quadratique à une variable

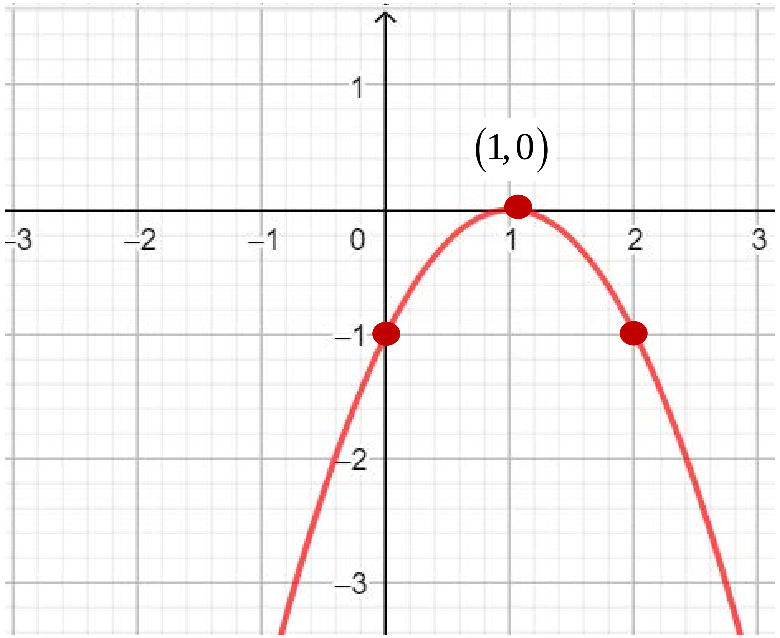
Suite exemple 6 : $y = -x^2 + 2x - 1, \quad \Delta = 0$

- Le sommet de la parabole : $x_S = 1$ et $y_s = 0$

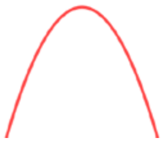
- La parabole touche l'axe des x en un seul point (au sommet).

- Trouver deux autres points de la parabole :

x	$y_1 = -x^2 + 2x - 1$
0	-1
2	-1



- $a = -1 < 0$



Parabole : résolution d'une équation quadratique à une variable

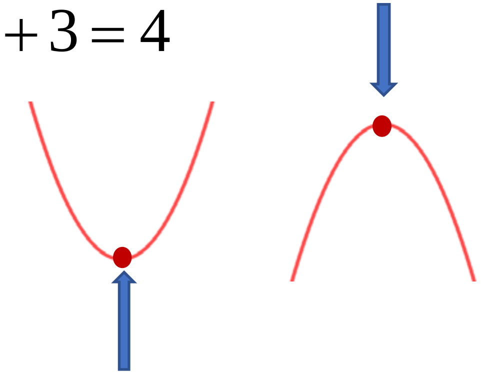
Exemple 7 $y=-x^2-2x+3$

$a=-1$

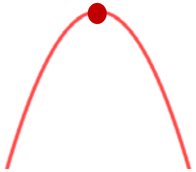
$b=-2$

$c=3$

- Le sommet de la parabole : $x_s=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{-2}=-1$ et $y_s=-(-1)^2-2(-1)+3=4$



- $a=-1<0$



- $\Delta=16>0$, l'équation $-x^2-2x+3=0$ admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=3 \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=1$$

$$\Updownarrow$$

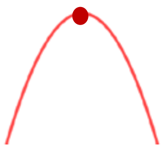
La parabole coupe l'axe des x en ces points : $(3,0)$ et $(1,0)$

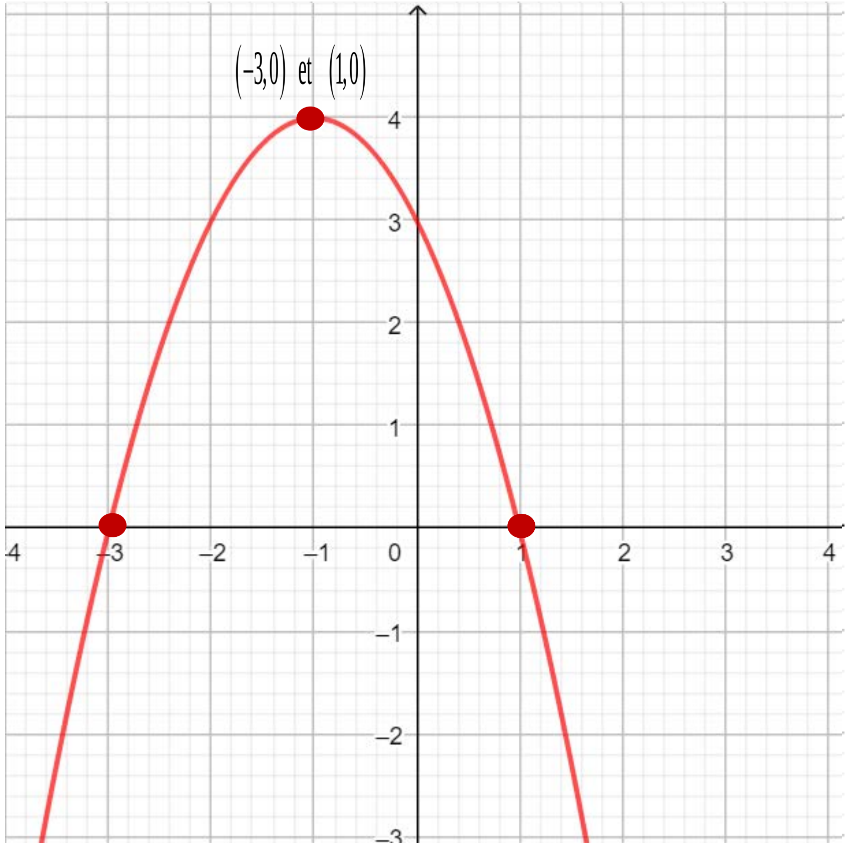
Parabole : résolution d'une équation quadratique à une variable

Suite exemple 7 $y = -x^2 - 2x + 3, \quad \Delta > 0$

- Le sommet de la parabole : $x_S = -1$ et $y_s = 4$

- La parabole coupe l'axe des x en deux points : $(-3,0)$ et $(1,0)$
.

- $a = -1 < 0$ 



Résumé

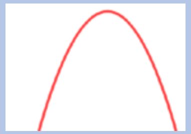
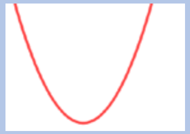
Équation quadratique à une variable

$x^2 + B^2 = 0$

$S = \varnothing$

- Équation quadratique à une variable : $ax^2 + bx + c = 0$
- Techniques de résolution d'une équation quadratique
  - Résolution par la **formule quadratique :** $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\boxed{x^2 - 9 = 0}$
  - Résolution par application de **la racine carrée** : $A^2 = B \Leftrightarrow A = \pm\sqrt{B}$, où $B \geq 0$ $\boxed{x^2 - 9 = 0}$
  - Résolution par **factorisation** $\boxed{x^2 - 9 = 0}$

Résumé

- Le graphe de $y = ax^2 + bx + c$ est une parabole
- Le sommet de la parabole : $x_S = -\dfrac{b}{2a}$ et $y_s = a{x_S}^2 + bx_S + c$
- Si $a < 0$, alors la parabole est ouverte vers le bas 
- Si $a > 0$, alors la parabole est ouverte vers le haut 
- Si $\Delta < 0$, alors la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses
- Si $\Delta = 0$, alors la parabole touche, sans la couper, l'axe des abscisses à son sommet
- Si $\Delta > 0$, alors la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points

Références

- Michèle Gingras, Mathématique d’appoint, 5e édition, 2015, Éditeur Chenelière éducation
- Josée Hamel, Mise à niveau Mathématique, 2e édition, 2017, Éditeur Pearson (ERPI)