HEC MONTRÉAL

DÉPARTEMENT DE SCIENCES DE LA DÉCISION
FATIHA KACHER – Maître d'enseignement
CENTRE D'AIDE EN MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE
MICHEL KEOULA – Coordonnateur

MATHÉMATIQUES D'APPOINT

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS QUADRATIQUES À UNE VARIABLE

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS QUADRATIQUES À UNE VARIABLE

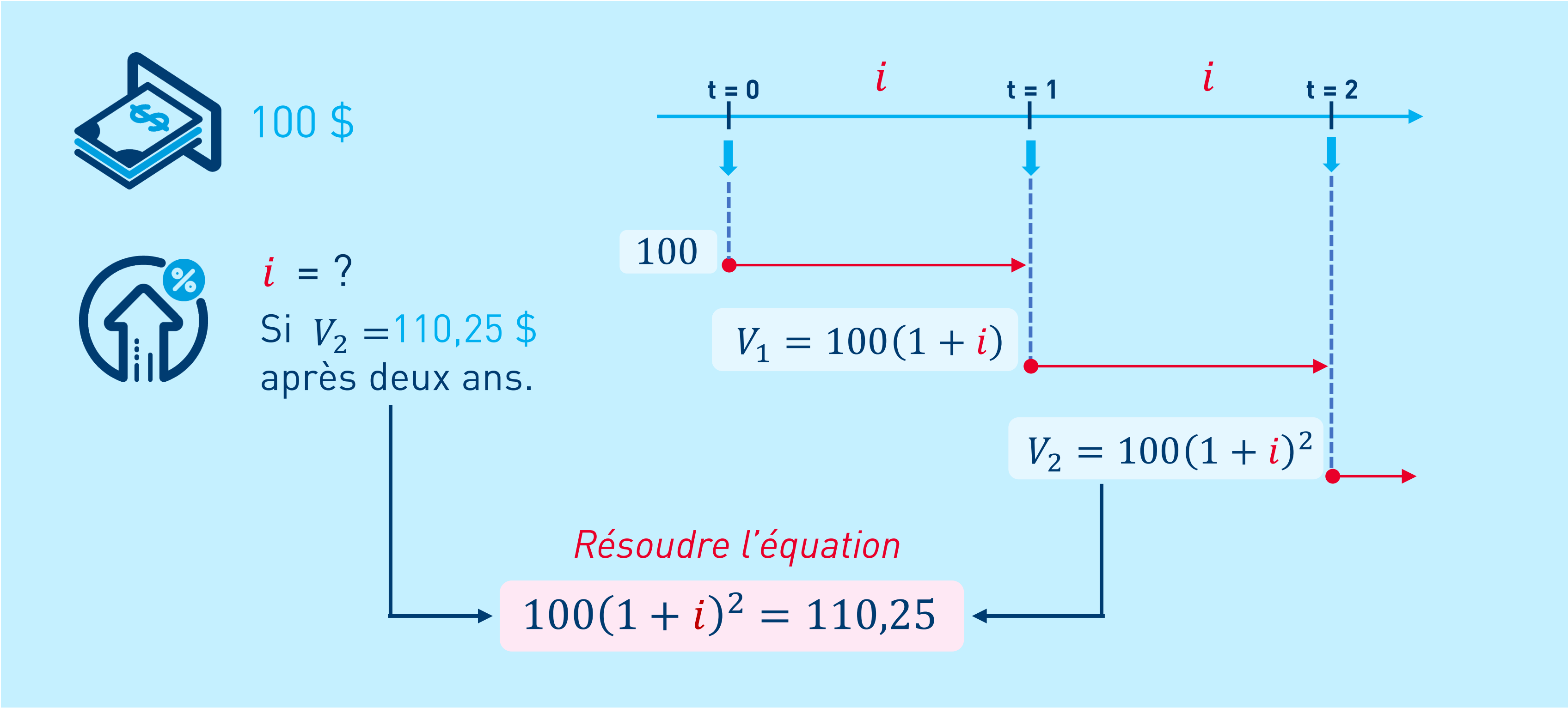
RÉSOLUTION D’ÉQUATIONS QUADRATIQUES À UNE VARIABLE

Reconnaître une équation quadratique

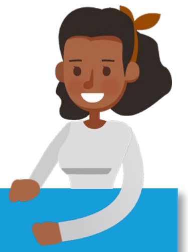
Résoudre une équation quadratique

1 DÉFINITION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

EXEMPLE INTRODUCTIF



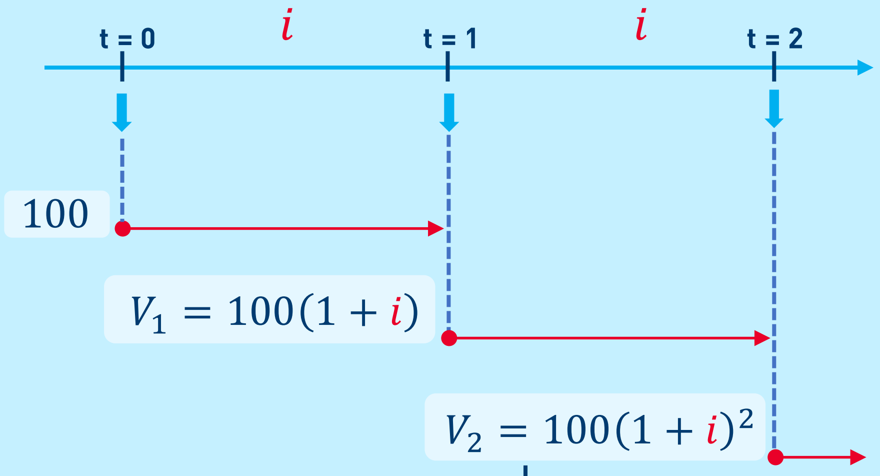
1 DÉFINITION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE | EXEMPLE INTRODUCTIF



100 $

i = ?

Si V_2 = 110,25 $
après deux ans.



Résoudre l'équation

$$100(1+i)^2 = 110,25$$

$$100(1+i)^2$$

polynôme à une variable
de **degré deux**

1 DÉFINITION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

EXEMPLE INTRODUCTIF

100 $

i = ?

Si $V_2 =$ 110,25 $ après deux ans.

t = 0 i t = 1 i t = 2

100

$V_1 = 100(1+i)$

$V_2 = 100(1+i)^2$

Résoudre l'équation

$$100(1+i)^2 = 110{,}25$$

$$100(1+i)^2$$

polynôme à une variable de **degré deux**

$$100(1+i)^2 = 110{,}25$$

équation quadratique à une variable

1 DÉFINITION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

DÉFINITION

L'équation quadratique à une variable est une équation à une seule variable qu'on peut présenter sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\text{où } x \text{ est la variable (l'inconnue), } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0.$$

$$100(1+i)^2 = 110{,}25 \Leftrightarrow 100(i^2 + 2i + 1) = 110{,}25$$

Développement du trinôme

$$\Leftrightarrow 100i^2 + 200i + 100 = 110{,}25$$

Distributivité

$$\Leftrightarrow 100i^2 + 200i + 100 - 110{,}25 = 0$$

Soustraction de 110,25 aux deux membres

$$\Leftrightarrow \underline{100}i^2 + \underline{200}i \underline{- 10{,}25} = 0$$

- $a = 100$
- $b = 200$
- $c = -10{,}25$

1 DÉFINITION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0, \; a \neq 0$$

Ces équations ***sont quadratiques*** *:*

$$x^2 - 1 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow -x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{x^2 - 2x}{3} \quad \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$-\sqrt{2}\,x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$$

$$a = -\sqrt{2}$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

$$c = 1$$

1 DÉFINITION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Ces équations ***sont quadratiques*** *:*

$$x^2 - 1 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow -x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{x^2 - 2x}{3} \quad \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$-\sqrt{2}\,x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$$

$$a = -\sqrt{2}$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

$$c = 1$$

Ces équations ***sont non-quadratiques*** *:*

$$x^2 + \sqrt{x} + 1 = 0$$

$$\frac{x}{x^2+1} = x + 1$$

$$x^2 + 2x + 3 = x^2 + 3x + 5$$

1 DÉFINITION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Ces équations ***sont quadratiques*** *:*

$$x^2 - 1 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow -x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{x^2 - 2x}{3} \quad \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$-\sqrt{2}\,x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$$

$a = -\sqrt{2}$

$b = -\frac{1}{2}$

$c = 1$

Ces équations ***sont non-quadratiques*** *:*

$x^2 + \sqrt{x} + 1 = 0$ — x est sous un radical

$\frac{x}{x^2 + 1} = x + 1$ — x est au dénominateur

$x^2 + 2x + 3 = x^2 + 3x + 5 \Leftrightarrow x + 2 = 0$ $(a = 0)$

2 RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

2 RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

À l'aide de la formule quadratique

Soit l'équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$

Discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
L'équation n'admet aucune solution réelle.	L'équation admet la solution réelle double : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	L'équation admet deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

2 RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Exemple :

À quel taux d'intérêt i avez-vous investi si vous avez accumulé 110,25 $ au bout de 2 ans ?

$$100(1+i)^2 = 110{,}25$$

$$100(1+i)^2 = 110{,}25 \quad \Leftrightarrow \quad 100i^2 + 200i - 10{,}25 = 0$$

$a = 100$

$b = 200$

$c = -10{,}25$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 200^2 - 4(100)(-10{,}25) = 44100$$

$$\Delta = 44100 > 0, \qquad \sqrt{\Delta} = 210$$

L'équation admet deux solutions réelles :

$$i_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-200 - \sqrt{44100}}{2(100)}$$

$$i_1 = -2{,}05$$

et

$$i_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-200 + \sqrt{44100}}{2(100)}$$

$$i_2 = 0{,}05$$

2 RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Exemple :

À quel taux d'intérêt ***i*** avez-vous investi si vous avez accumulé 110,25 $ au bout de 2 ans ?

$$100(1+i)^2 = 110{,}25$$

$$100(1+i)^2 = 110{,}25 \quad \Leftrightarrow \quad 100i^2 + 200i - 10{,}25 = 0$$

$a = 100$

$b = 200$

$c = -10{,}25$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 200^2 - 4(100)(-10{,}25) = 44100$$

$$\Delta = 44100 > 0, \qquad \sqrt{\Delta} = 210$$

L'équation admet deux solutions réelles :

$\cancel{i_1 = -2{,}05}$ et $\boxed{i_2 = 0{,}05}$

2 RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Exemple :

À quel taux d'intérêt i avez-vous investi si vous avez accumulé 110,25 $ au bout de 2 ans ?

$$100(1+i)^2 = 110{,}25$$

$$100(1+i)^2 = 110{,}25 \quad \Leftrightarrow \quad 100i^2 + 200i - 10{,}25 = 0$$

$a = 100$

$b = 200$

$c = -10{,}25$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 200^2 - 4(100)(-10{,}25) = 44100$$

$$\Delta = 44100 > 0, \qquad \sqrt{\Delta} = 210$$

L'équation admet deux solutions réelles :

$\cancel{i_1 = -2{,}05}$ et $\boxed{i_2 = 0{,}05}$

Le taux d'intérêt composé sur votre placement est i **= 5%**

$$S = \{0{,}05\}$$

2 RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

- À l’aide de la formule quadratique
- Par application d’une racine carrée
- Par factorisation

S = *Ensemble solution*

2 RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Exemple :

À quel taux d'intérêt i avez-vous investi si vous avez accumulé 110,25 $ au bout de 2 ans ?

$$100(1+i)^2 = 110{,}25$$

2 RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Par application d'une racine carrée

Exemple :

À quel taux d'intérêt i avez-vous investi si vous avez accumulé 110,25 $ au bout de 2 ans ?

$$100(1+i)^2 = 110{,}25$$

2 RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Par application d'une racine carrée

Exemple : À quel taux d'intérêt i avez-vous investi si vous avez accumulé 110,25 $ au bout de 2 ans ?

$$100(1+i)^2 = 110{,}25$$

$$100(1+i)^2 = 110{,}25 \quad \Leftrightarrow (1+i)^2 = \frac{110{,}25}{100}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1+i)^2} = \sqrt{\frac{110{,}25}{100}}$$

$$\Leftrightarrow |1+i| = 1{,}05 \quad \Leftrightarrow 1+i = \pm 1{,}05$$

Propriétés des radicaux

$$x^2 = A \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{A},\ où\ A \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{A}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{A}$$

2 RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Par application d'une racine carrée

Exemple : À quel taux d'intérêt i avez-vous investi si vous avez accumulé 110,25 \$ au bout de 2 ans ?

$$100(1+i)^2 = 110{,}25$$

$$100(1+i)^2 = 110{,}25 \quad \Leftrightarrow (1+i)^2 = \frac{110{,}25}{100}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1+i)^2} = \sqrt{\frac{110{,}25}{100}}$$

$$\Leftrightarrow |1+i| = 1{,}05 \quad \Leftrightarrow 1+i = \pm 1{,}05$$

$$\cancel{i_1 = -1{,}05 - 1 = -2{,}05}$$ *À rejeter*

$$i_2 = 1{,}05 - 1 = 0{,}05$$

Le taux d'intérêt composé sur votre placement est i **= 5%**

$$S = \{0{,}05\}$$

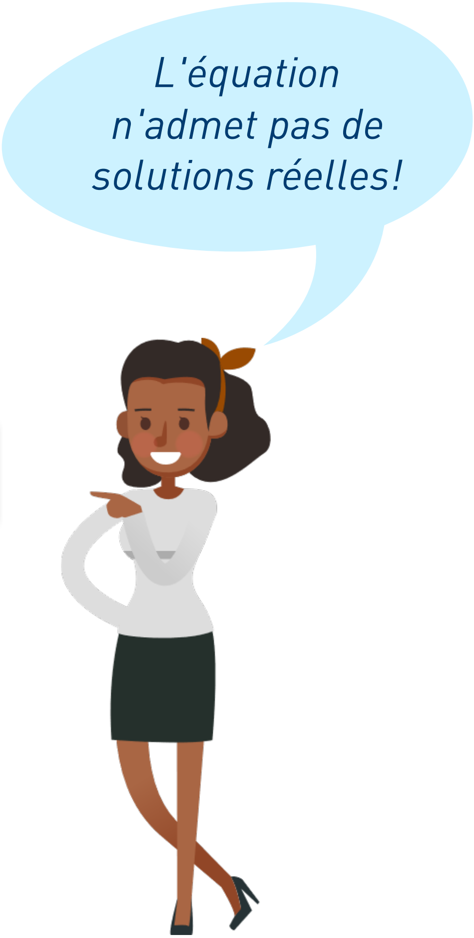
2 RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Par application d'une racine carrée

Exemple : Résoudre l'équation suivante : $x^2 + 4 = 0$

$x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$ ▶ Contradiction, car $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$

$$S = \emptyset$$



Vérification par la formule quadratique

$x^2 + 4 = 0 \rightarrow a = 1,\ b = 0,\ c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = -16 < 0$

2 RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Par application d'une racine carrée

Exemple : Résoudre l'équation suivante : $x^2 + 4 = 0$

$x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$ Contradiction, car $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$

$x^2 + B^2 = 0,\ B \neq 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

$S = \emptyset$

Vérification par la formule quadratique

$x^2 + 4 = 0 \rightarrow a = 1,\ b = 0,\ c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = -16 < 0$

2 RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Par factorisation (différence de carrés)

Exemple : Résoudre l'équation suivante : $(x-1)^2 - 9 = 0$

Différence de carrés

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

Produit nul

$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \; ou \; B = 0$

$$\underbrace{(x-1)^2 - 9}_{A^2 - B^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\underbrace{(x-1)}_{A} - \underbrace{3}_{B}\right]\left[\underbrace{(x-1)}_{A} + \underbrace{3}_{B}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x+2) = 0$$

$\Leftrightarrow \; x - 4 = 0$ (ce qui correspond à $x = 4$)

ou $x + 2 = 0$ (ce qui correspond à $x = -2$).

$$\boxed{S = \{-2\,,\,4\}}$$

2 RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Par factorisation

Exemple : Résoudre l'équation suivante : $8x^2 + 4x = 0$

Mise en évidence simple

$ab + ac = a(b + c)$

Produit nul

$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$

$8x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 4x = 0$ (ce qui correspond à $x = 0$)

ou $2x + 1 = 0$ (ce qui correspond à $x = -\dfrac{1}{2}$).

$$S = \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$$

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

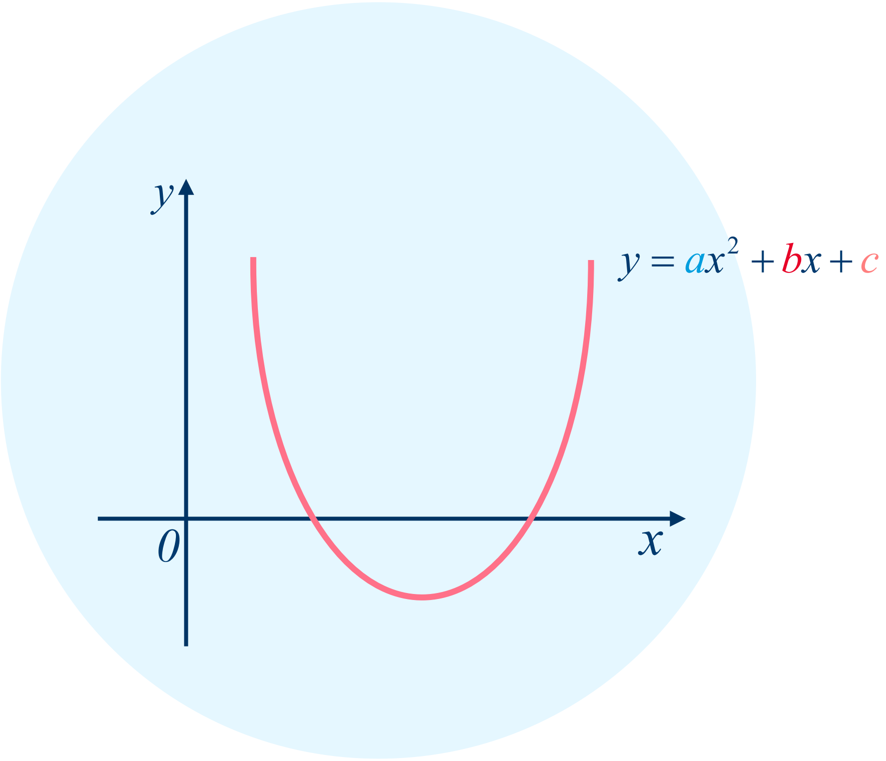
La **représentation graphique** de

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

est **une parabole.**

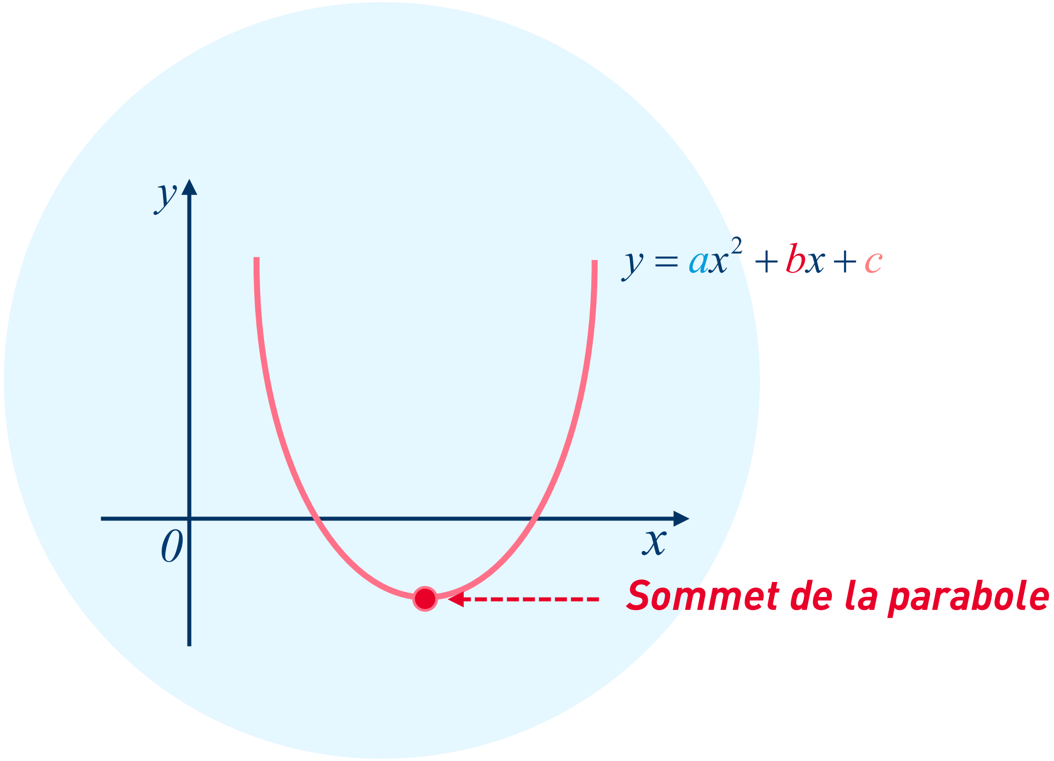
3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

La **représentation graphique** de $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ est **une parabole.**



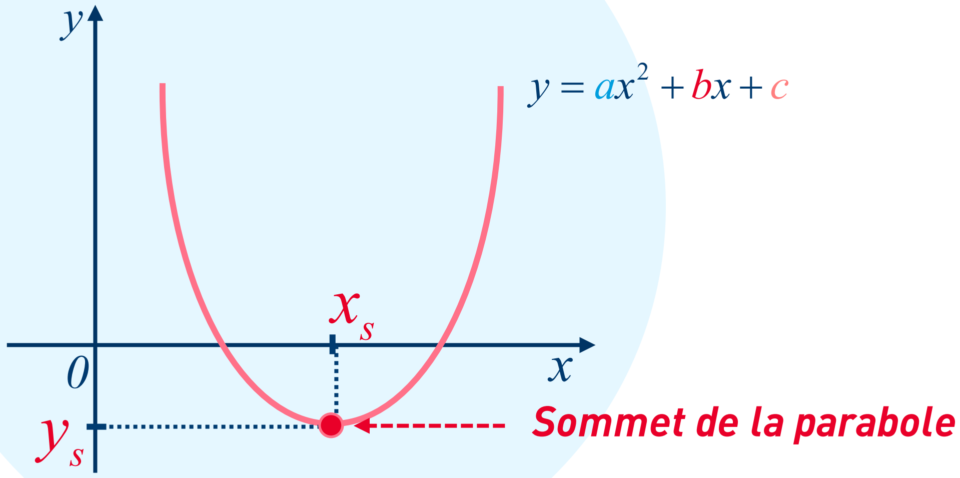
3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

La **représentation graphique** de $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ est **une parabole.**



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

La **représentation graphique** de $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ est **une parabole.**

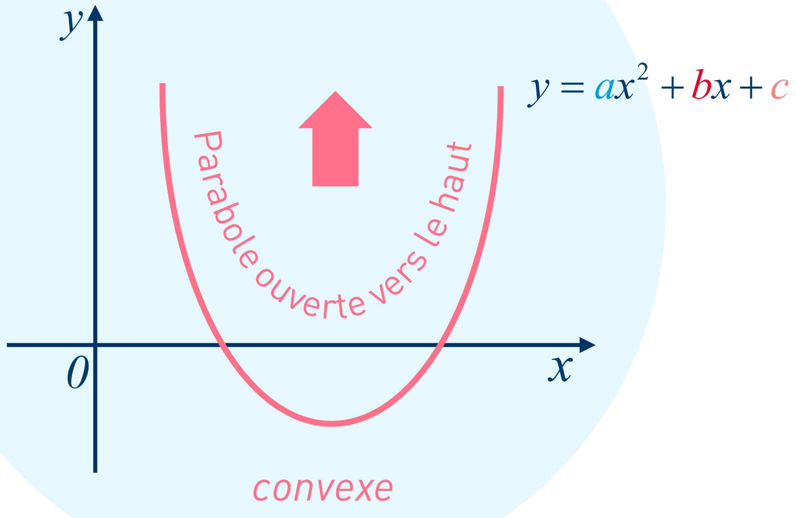


$$y_s = ax_s^2 + bx_s + c \quad \text{avec} \quad x_s = -\frac{b}{2a}$$

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

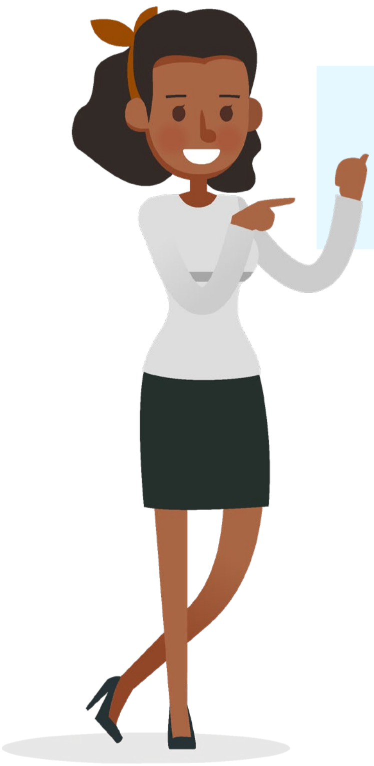
La **représentation graphique** de $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ est **une parabole.**

Si $a > 0$

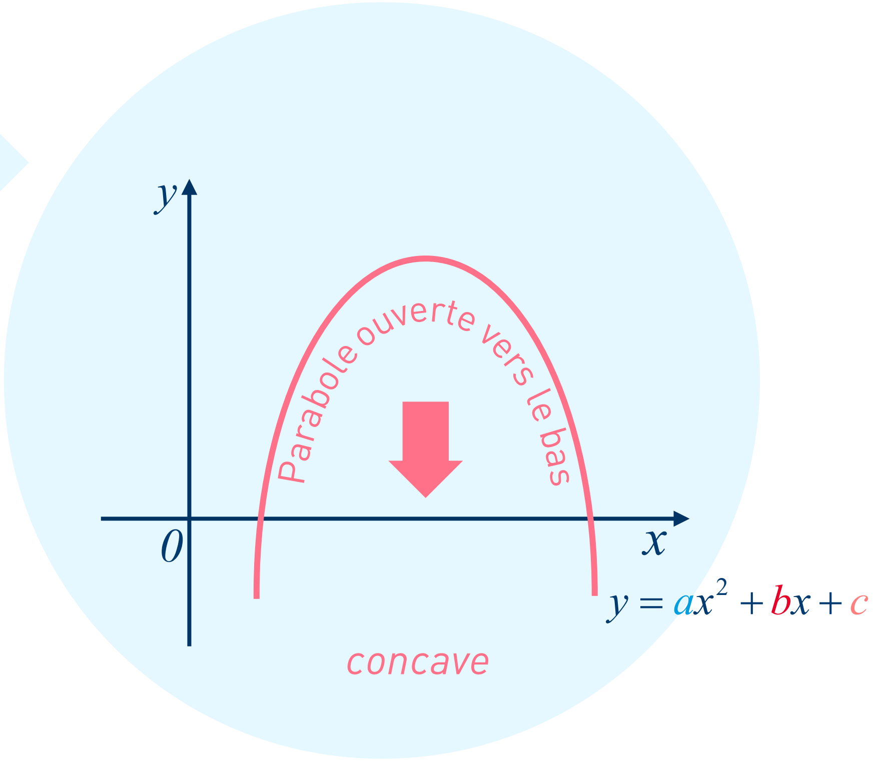


3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

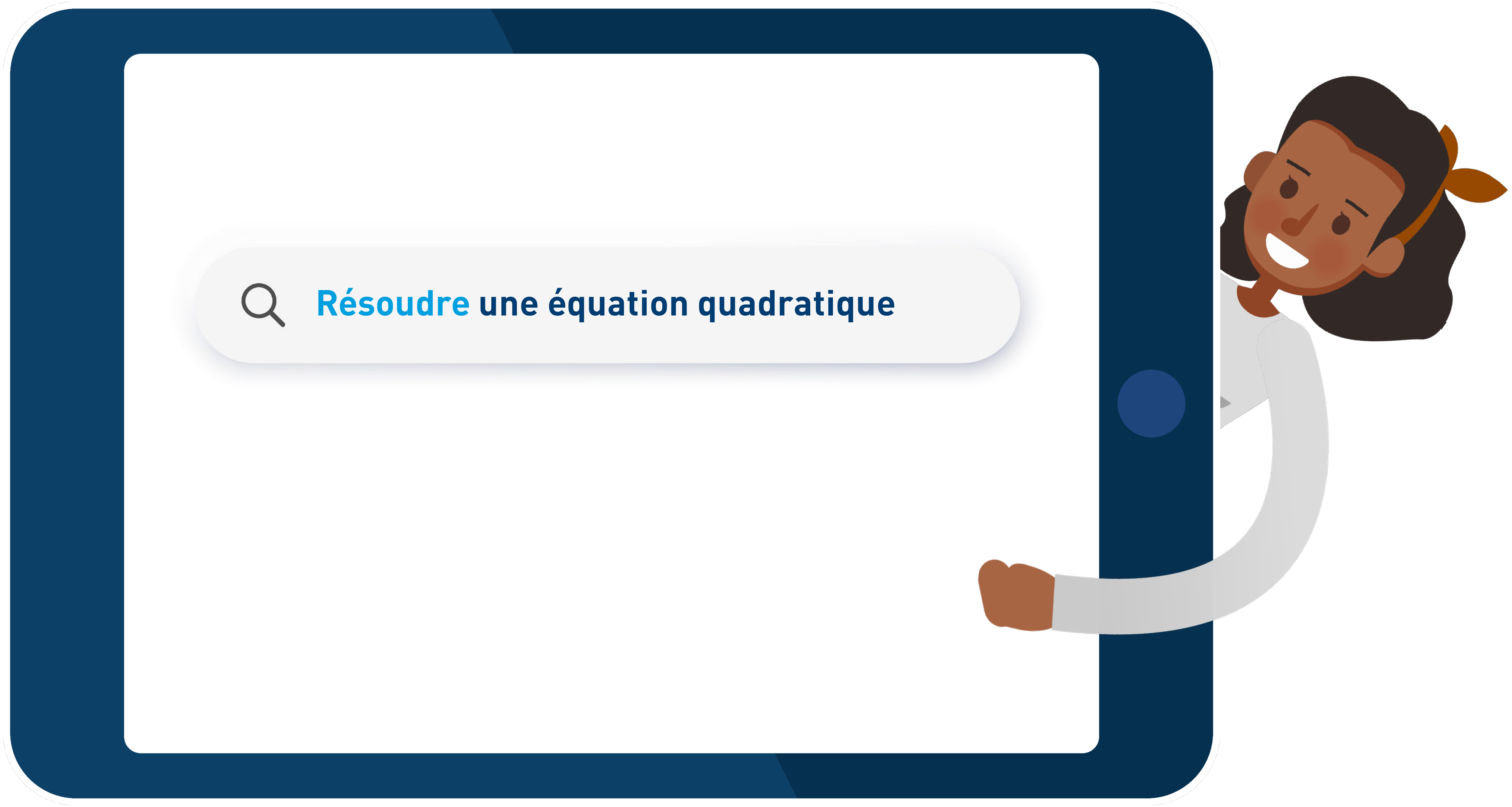
La **représentation graphique** de $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ est **une parabole.**



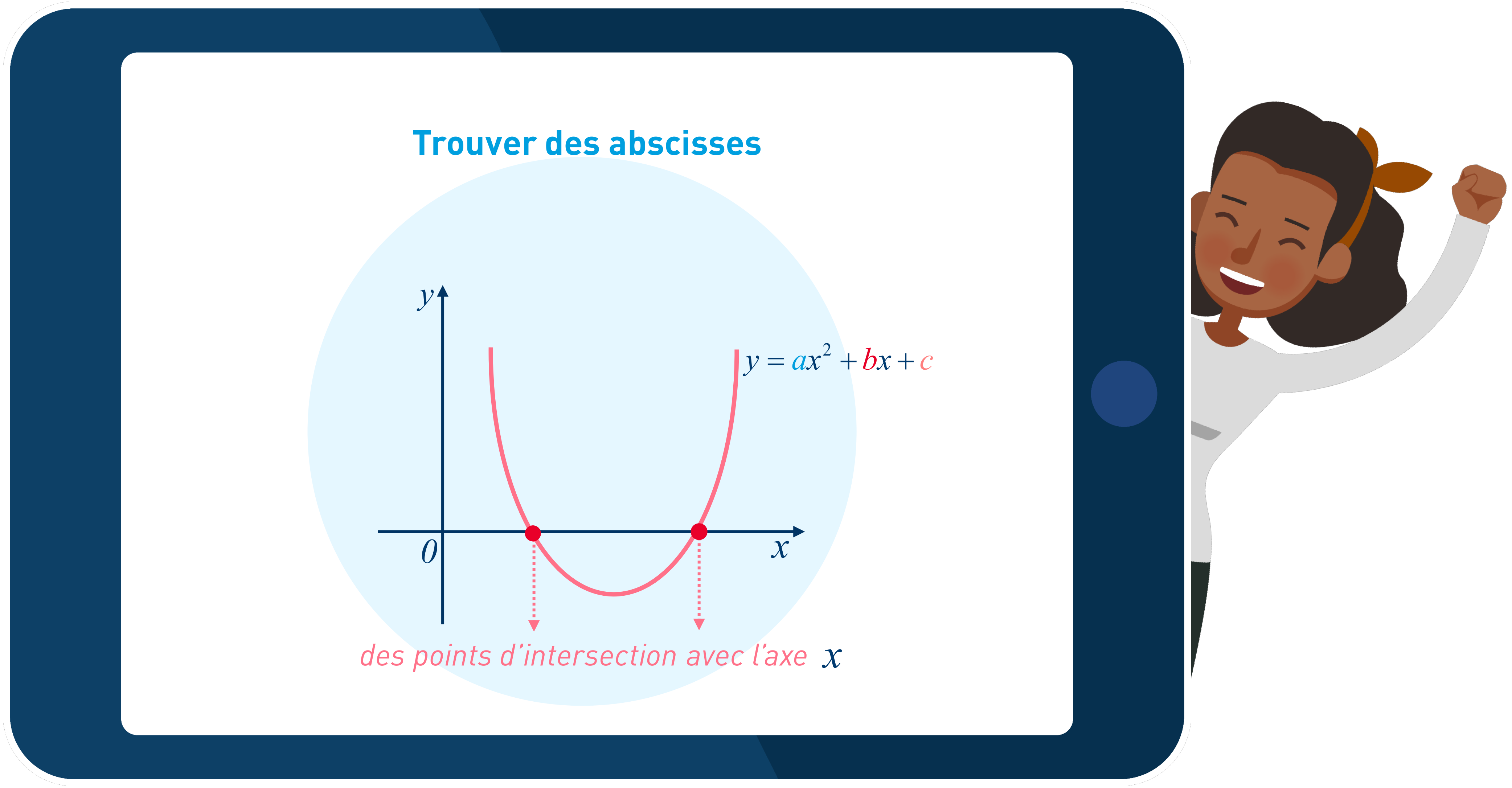
Si $a < 0$



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D’UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = x^2 + 4$

$$y = x^2 + 4 \quad \begin{cases} \to a = 1 \\ \to b = 0 \\ \to c = 4 \end{cases}$$

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D’UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = x^2 + 4$

Le **sommet** de la parabole :

$$x_s = -\frac{b}{2a}$$

$$y_s = x_s^2 + bx_s + c$$

$$y = x^2 + 4 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = x^2 + 4$

Le ***sommet*** *de la parabole :*

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2} = \boxed{0}$$

$$y_s = x_s^2 + bx_s + c = 0^2 + 0 + 4 = \boxed{4}$$

$$y = x^2 + 4 \rightarrow a = 1,\quad b = 0,\quad c = 4$$

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = x^2 + 4$

Le ***sommet*** *de la parabole :*

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2} = \boxed{0}$$

$$y_s = x_s^2 + bx_s + c = 0^2 + 0 + 4 = \boxed{4}$$

$y = x^2 + 4$ → $a = 1$, $b = 0$, $c = 4$

$a = 1 > 0$ ➡ *La parabole est ouverte vers le haut.*

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = x^2 + 4$

$y = x^2 + 4$

- $a = 1$
- $b = 0$
- $c = 4$

Le **sommet** de la parabole :

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2} = \boxed{0}$$

$$y_s = x_s^2 + bx_s + c = 0^2 + 0 + 4 = \boxed{4}$$

$a = 1 > 0$ ➡ *La parabole est ouverte vers le haut.*

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 1 \times 4 = -16 < 0$$

L'équation $x^2 + 4 = 0$ *n'admet aucune solution.*

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D’UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = x^2 + 4$

$$y = x^2 + 4 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

! *Le **sommet** de la parabole :*

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2} = \boxed{0}$$

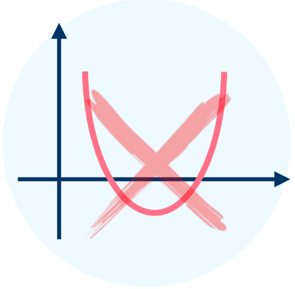
$$y_s = x_s^2 + bx_s + c = 0^2 + 0 + 4 = \boxed{4}$$

! $a = 1 > 0$ ➡ *La parabole est ouverte vers le haut.*

! $\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 1 \times 4 = -16 < 0$

L’équation $x^2 + 4 = 0$ *n’admet aucune solution.*

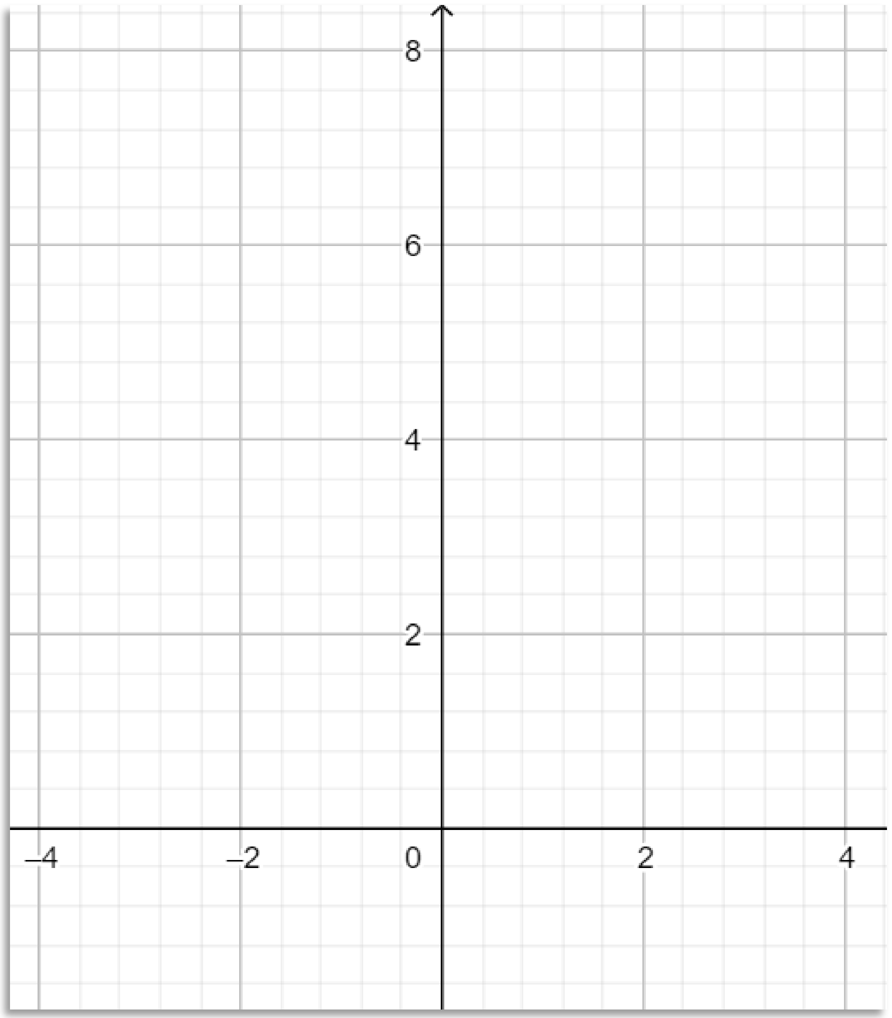
La parabole ne coupe pas l’axe des x.



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = x^2 + 4$



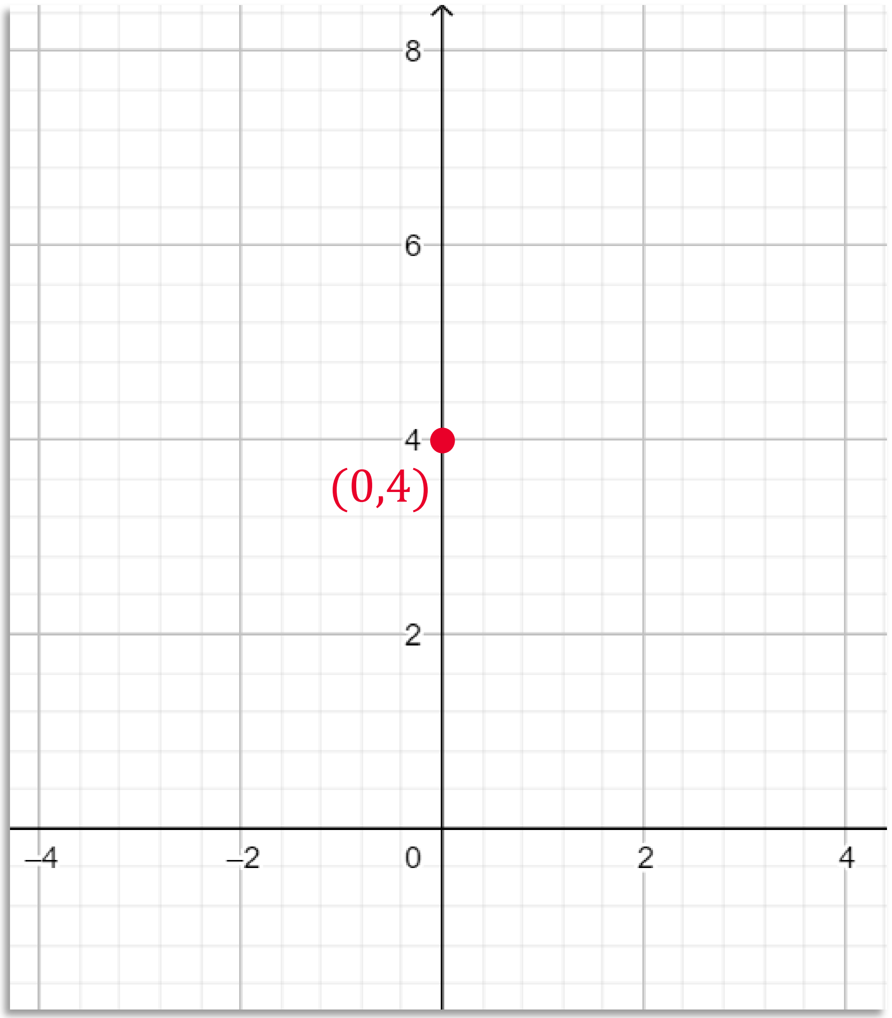
3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = x^2 + 4$

Le ***sommet*** *de la parabole :*

$$x_s = 0$$
$$y_s = 4$$



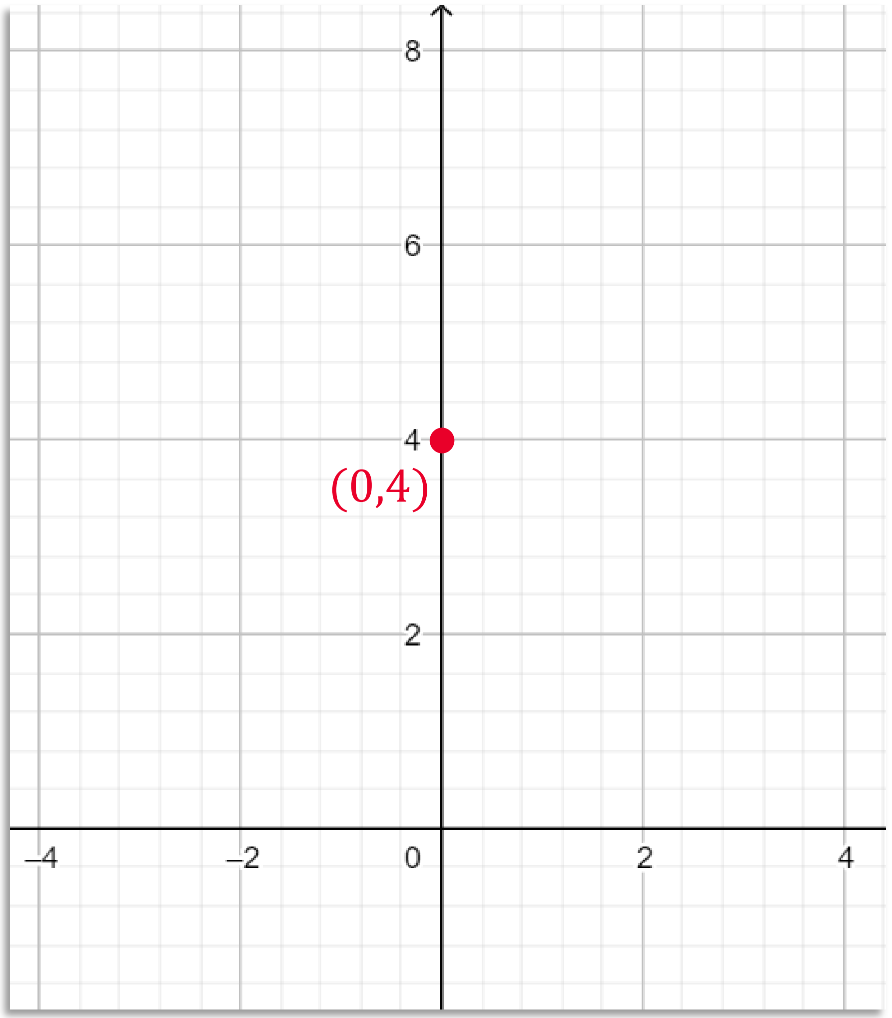
3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = x^2 + 4$

*Le **sommet** de la parabole :* $x_s = 0$, $y_s = 4$

$\Delta < 0$ ⟶ *La parabole ne coupe pas l'axe des x.*



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

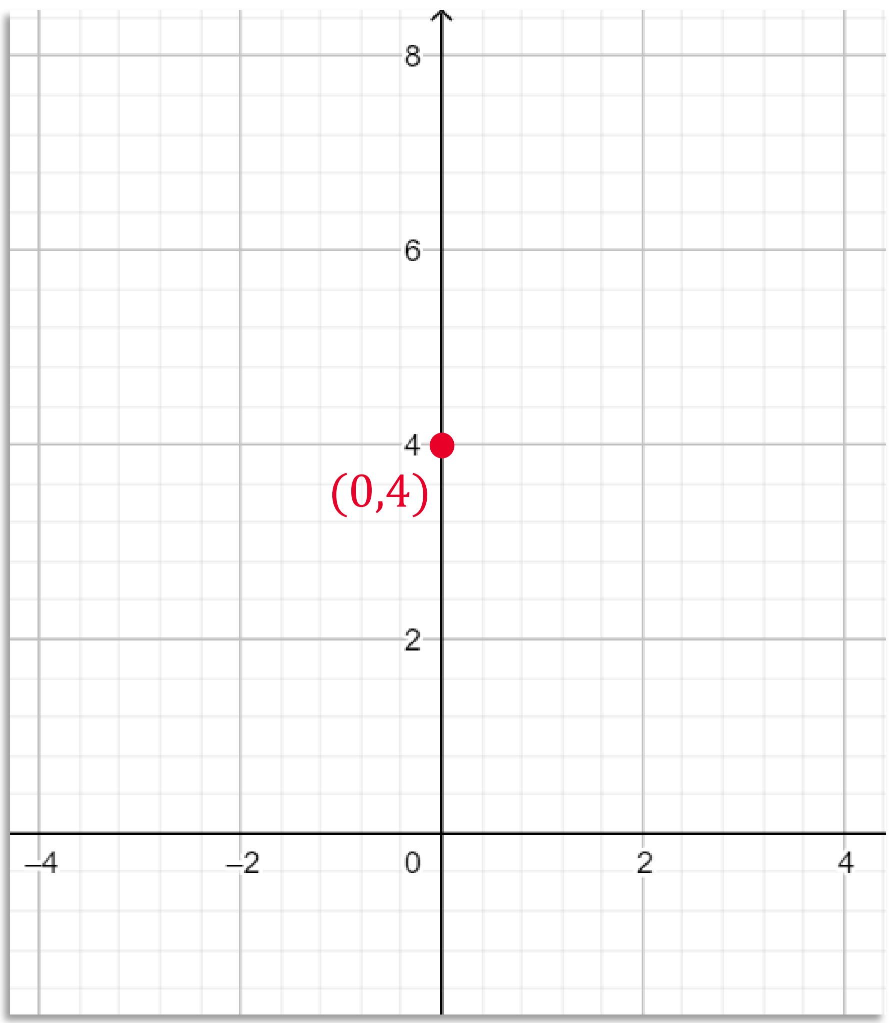
Exemple : $y = x^2 + 4$

*Le **sommet** de la parabole :* $x_s = 0$, $y_s = 4$

$\Delta < 0$ → *La parabole ne coupe pas l'axe des x.*

→ *Deux autres points de la parabole :*

x	$y_1 = x^2 + 4$



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

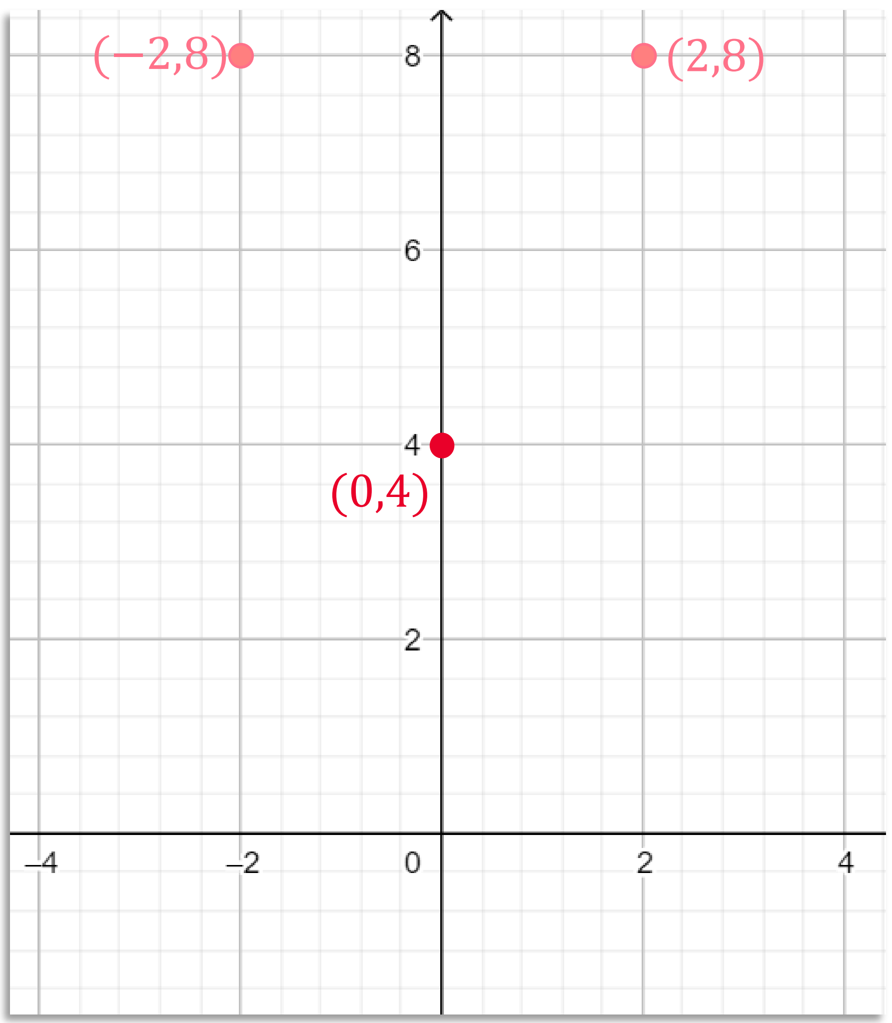
Exemple : $y = x^2 + 4$

*Le **sommet** de la parabole :* $x_s = 0$, $y_s = 4$

$\Delta < 0$ → *La parabole ne coupe pas l'axe des* x.

→ *Deux autres points de la parabole :*

x	$y_1 = x^2 + 4$
−2	8
2	8



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = x^2 + 4$

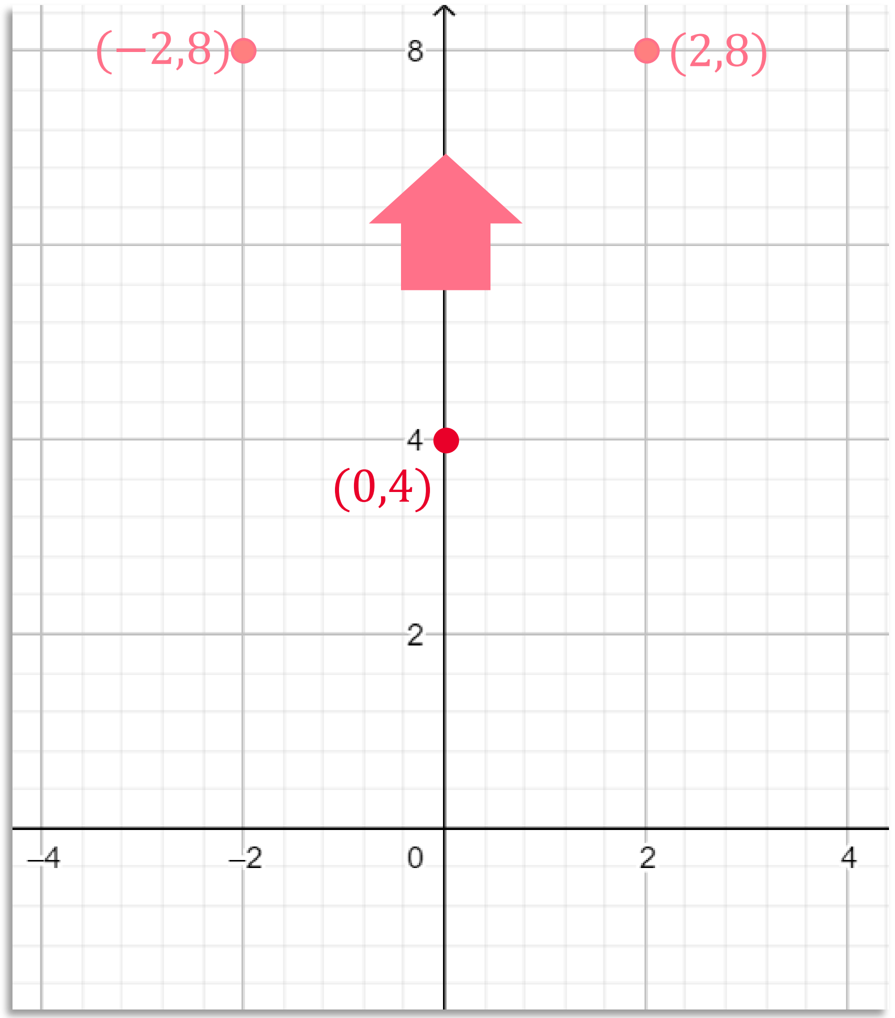
! *Le **sommet** de la parabole :* $x_s = 0$, $y_s = 4$

! $\Delta < 0$ ⟶ *La parabole ne coupe pas l'axe des x.*

⟶ *Deux autres points de la parabole :*

x	$y_1 = x^2 + 4$
−2	8
2	8

! $a = 1 > 0$ ⟶ 



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = x^2 + 4$

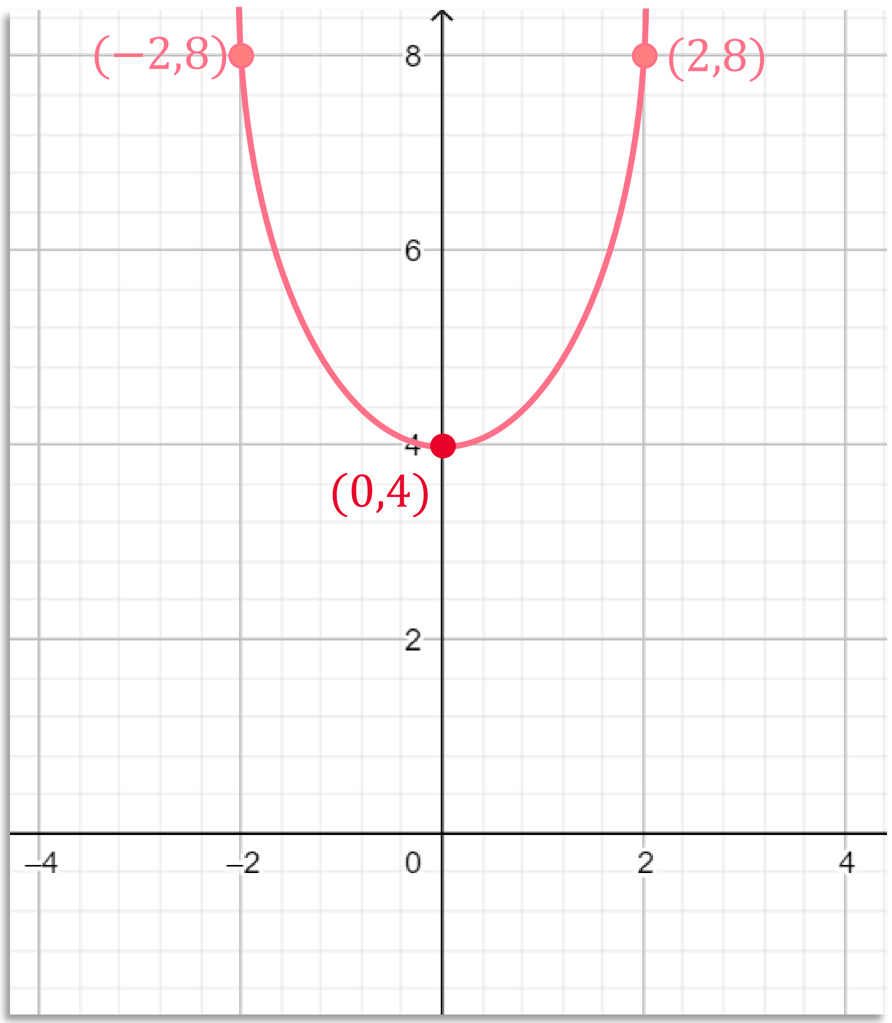
! *Le* ***sommet*** *de la parabole :* $x_s = 0$, $y_s = 4$

! $\Delta < 0$ → *La parabole ne coupe pas l'axe des x.*

→ *Deux autres points de la parabole :*

x	$y_1 = x^2 + 4$
−2	8
2	8

! $a = 1 > 0$ →



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D’UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple :

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 + 2x - 1$

$$y = -x^2 + 2x - 1 \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 + 2x - 1$

Le **sommet** de la parabole :

$$x_s = -\frac{b}{2a}$$

$$y_s = ax_s^2 + bx_s + c$$

$y = -x^2 + 2x - 1$ → $a = -1$, $b = 2$, $c = -1$

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 + 2x - 1$

! *Le **sommet** de la parabole :*

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = \boxed{1}$$

$$y_s = ax_s^2 + bx_s + c = -1^2 + 2(1) - 1 = \boxed{0}$$

$$y = -x^2 + 2x - 1$$

$a = -1$

$b = 2$

$c = -1$

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 + 2x - 1$

Le **sommet** de la parabole :

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = \boxed{1}$$

$$y_s = ax_s^2 + bx_s + c = -1^2 + 2(1) - 1 = \boxed{0}$$

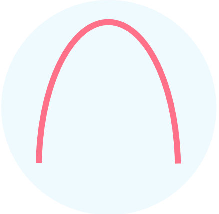
$y = -x^2 + 2x - 1$

$a = -1$

$b = 2$

$c = -1$

$a = -1 < 0$ ➡ *La parabole est ouverte vers le bas.*



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 + 2x - 1$

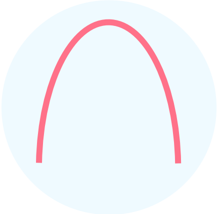
$y = -x^2 + 2x - 1$ → $a = -1$, $b = 2$, $c = -1$

*Le **sommet** de la parabole :*

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = \boxed{1}$$

$$y_s = ax_s^2 + bx_s + c = -1^2 + 2(1) - 1 = \boxed{0}$$

$a = -1 < 0$ ➡ *La parabole est ouverte vers le bas.*



$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(-1)(-1) = 0$$

L'équation $-x^2 + 2x - 1 = 0$
admet la solution unique → $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 + 2x - 1$

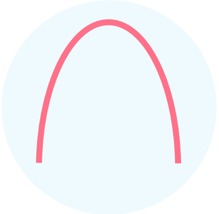
$$y = -x^2 + 2x - 1 \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

! *Le **sommet** de la parabole :*

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = \boxed{1}$$

$$y_s = ax_s^2 + bx_s + c = -1^2 + 2(1) - 1 = \boxed{0}$$

! $a = -1 < 0$ ➡ *La parabole est ouverte vers le bas.*



! $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(-1)(-1) = 0$

L'équation $-x^2 + 2x - 1 = 0$ *admet la solution unique* ⟶ $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = 1$

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 + 2x - 1$

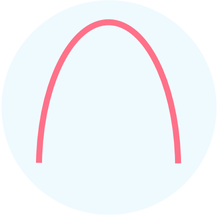
Le **sommet** de la parabole :

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = \boxed{1}$$

$$y_s = ax_s^2 + bx_s + c = -1^2 + 2(1) - 1 = \boxed{0}$$

$$y = -x^2 + 2x - 1 \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

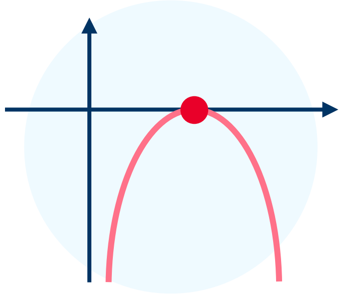
$a = -1 < 0$ ➡ *La parabole est ouverte vers le bas.*



$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(-1)(-1) = 0$$

L'équation $-x^2 + 2x - 1 = 0$
admet la solution unique ⟶ $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = 1$

La parabole touche l'axe des abscisses en $x = 1$ *sans le couper.*



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 + 2x - 1$

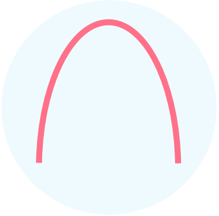
$y = -x^2 + 2x - 1$ → $a = -1$, $b = 2$, $c = -1$

! Le **sommet** de la parabole :

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = \boxed{1}$$

$$y_s = ax_s^2 + bx_s + c = -1^2 + 2(1) - 1 = \boxed{0}$$

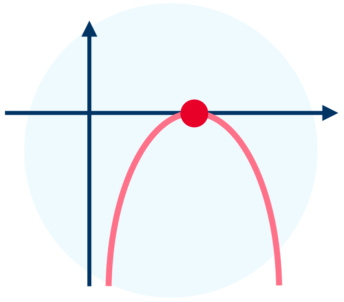
! $a = -1 < 0$ ➡ *La parabole est ouverte vers le bas.*



! $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(-1)(-1) = 0$

L'équation $-x^2 + 2x - 1 = 0$
admet la solution unique ⟶ $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$

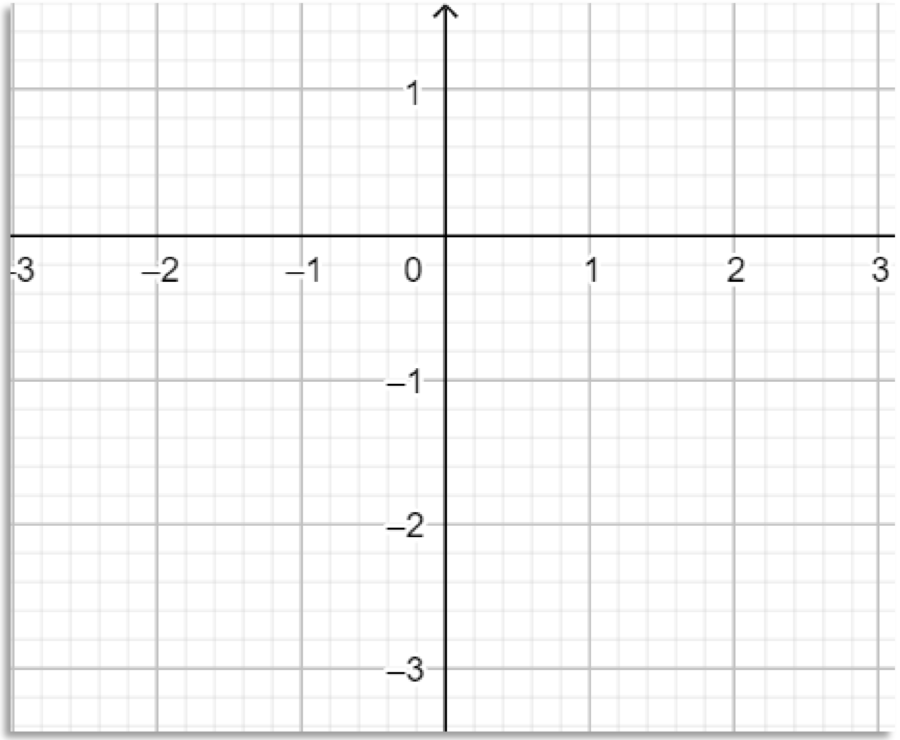
La parabole touche l'axe des abscisses en $x = 1$
sans le couper.



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 + 2x - 1$

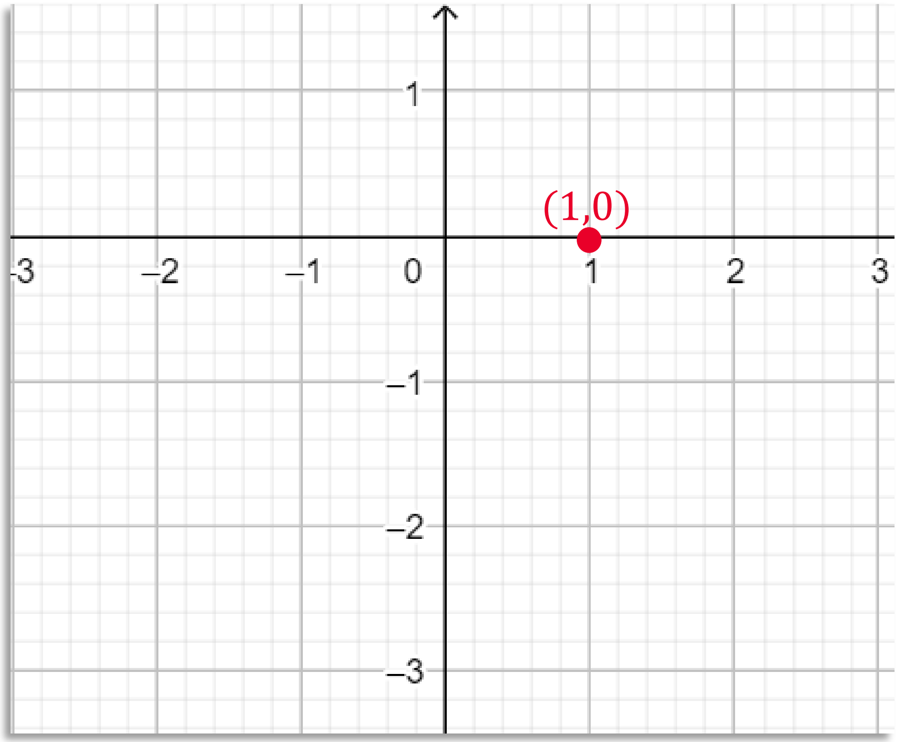


3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 + 2x - 1$

! *Le **sommet** de la parabole :* $x_s = 1$
$y_s = 0$



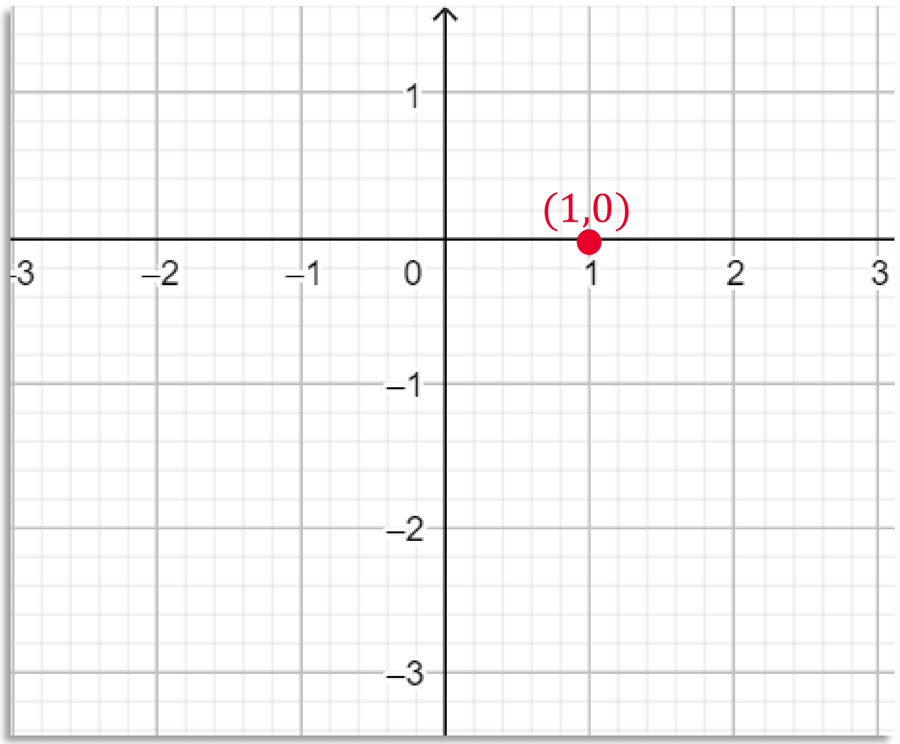
3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 + 2x - 1$

! *Le* ***sommet*** *de la parabole :* $x_s = 1$
$y_s = 0$

! $\Delta = 0$ → *La parabole touche l'axe des x en un seul point (au sommet).*



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

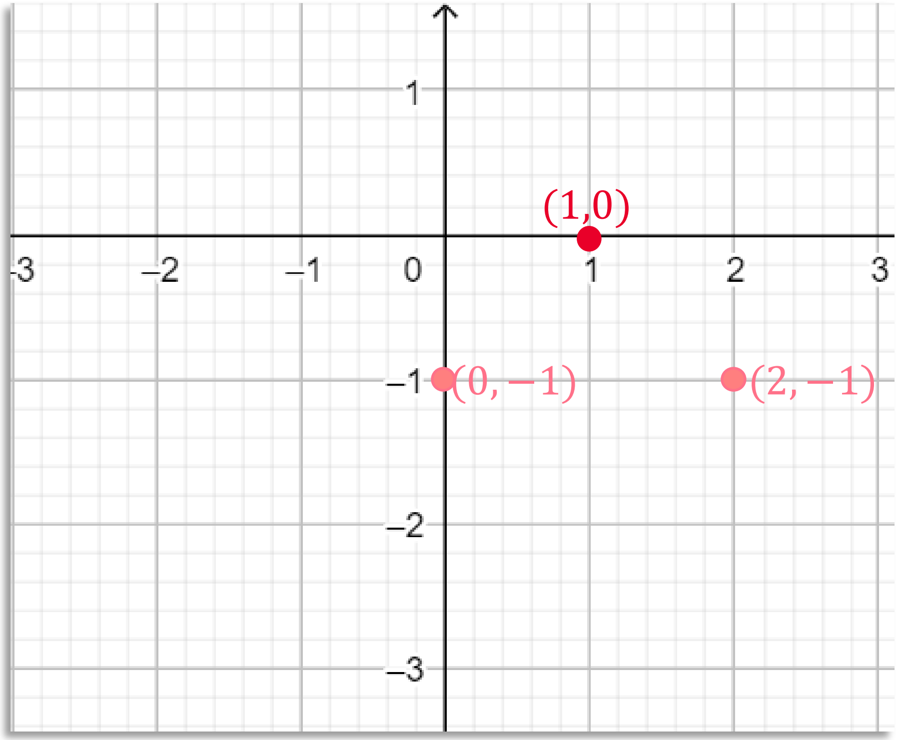
Exemple : $y = -x^2 + 2x - 1$

*Le **sommet** de la parabole :* $x_s = 1$
$y_s = 0$

$\Delta = 0$ ⟶ *La parabole touche l'axe des x en un seul point (au sommet).*

⟶ *Deux autres points de la parabole :*

x	$y_1 = -x^2 + 2x - 1$
0	-1
2	-1



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 + 2x - 1$

! Le **sommet** de la parabole : $x_s = 1$

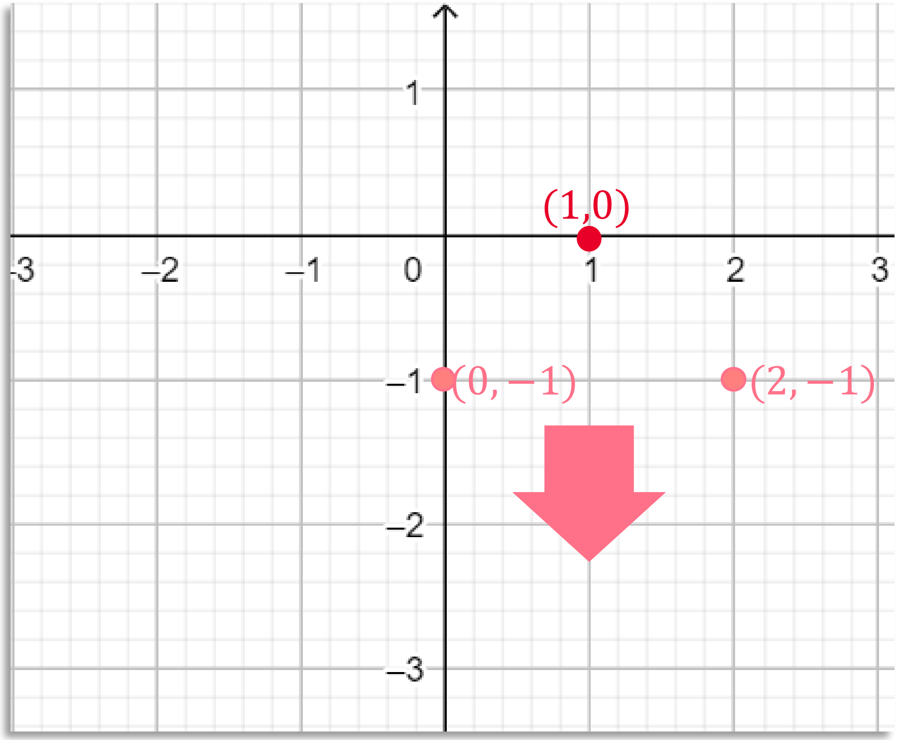
$y_s = 0$

! $\Delta = 0$ ⟶ *La parabole touche l'axe des x en un seul point (au sommet).*

⟶ *Deux autres points de la parabole :*

x	$y_1 = -x^2 + 2x - 1$
0	-1
2	-1

! $a = -1 < 0$ ⟶ 



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

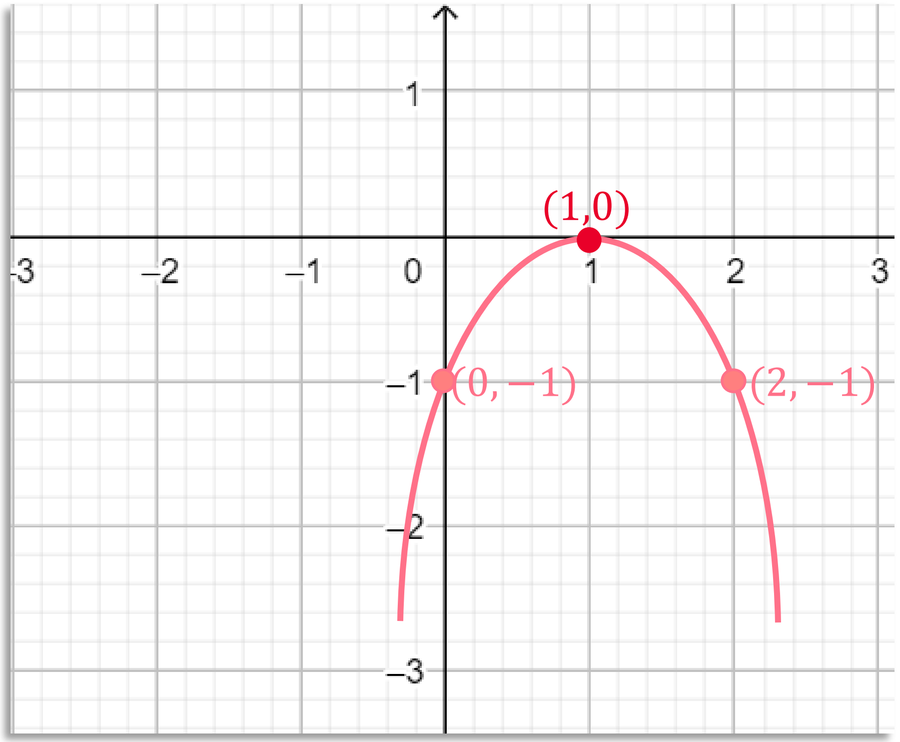
Exemple : $y = -x^2 + 2x - 1$

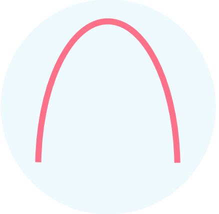
Le **sommet** de la parabole : $x_s = 1$
$y_s = 0$

$\Delta = 0$ ⟶ La parabole touche l'axe des x en un seul point (au sommet).

⟶ Deux autres points de la parabole :

x	$y_1 = -x^2 + 2x - 1$
0	-1
2	-1



$a = -1 < 0$ ⟶ 

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 - 2x + 3$

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 - 2x + 3$

Le sommet de la parabole :

$$x_s = -\frac{b}{2a}$$

$$y_s = ax_s^2 + bx_s + c$$

$$y = -x^2 - 2x + 3 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 - 2x + 3$

Le sommet de la parabole :

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{-2} = \boxed{-1}$$

$$y_s = ax_s^2 + bx_s + c = -(-1)^2 - 2(-1) + 3 = \boxed{4}$$

$y = -x^2 - 2x + 3$

$a = -1$

$b = -2$

$c = 3$

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 - 2x + 3$

Le sommet de la parabole :

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{-2} = \boxed{-1}$$

$$y_s = ax_s^2 + bx_s + c = -(-1)^2 - 2(-1) + 3 = \boxed{4}$$

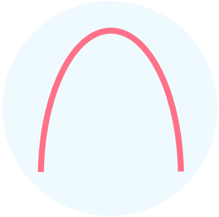
$y = -x^2 - 2x + 3$

$a = -1$

$b = -2$

$c = 3$

$a = -1 < 0$ ➡ *La parabole est ouverte vers le bas.*



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

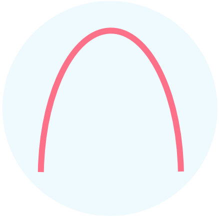
Exemple : $y = -x^2 - 2x + 3$

Le sommet de la parabole : $x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{-2} = \boxed{-1}$

$y_s = ax_s^2 + bx_s + c = -(-1)^2 - 2(-1) + 3 = \boxed{4}$

$y = -x^2 - 2x + 3 \rightarrow a = -1$, $b = -2$, $c = 3$

$a = -1 < 0$ ➡ *La parabole est ouverte vers le bas.*



$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(-1)(3) = 16 > 0$

➡ *L'équation* $-x^2 - 2x + 3 = 0$ *admet deux solutions:*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -3$$

3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 - 2x + 3$

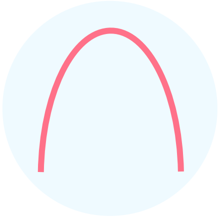
$$y = -x^2 - 2x + 3 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

! *Le sommet de la parabole :*

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{-2} = \boxed{-1}$$

$$y_s = ax_s^2 + bx_s + c = -(-1)^2 - 2(-1) + 3 = \boxed{4}$$

! $a = -1 < 0$ ➡ *La parabole est ouverte vers le bas.*

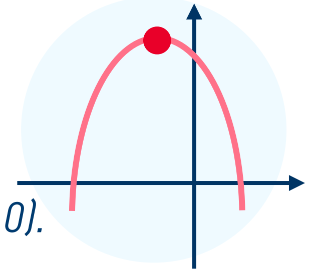


! $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(-1)(3) = 16 > 0$

➡ *L'équation* $-x^2 - 2x + 3 = 0$ *admet deux solutions:*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -3$$

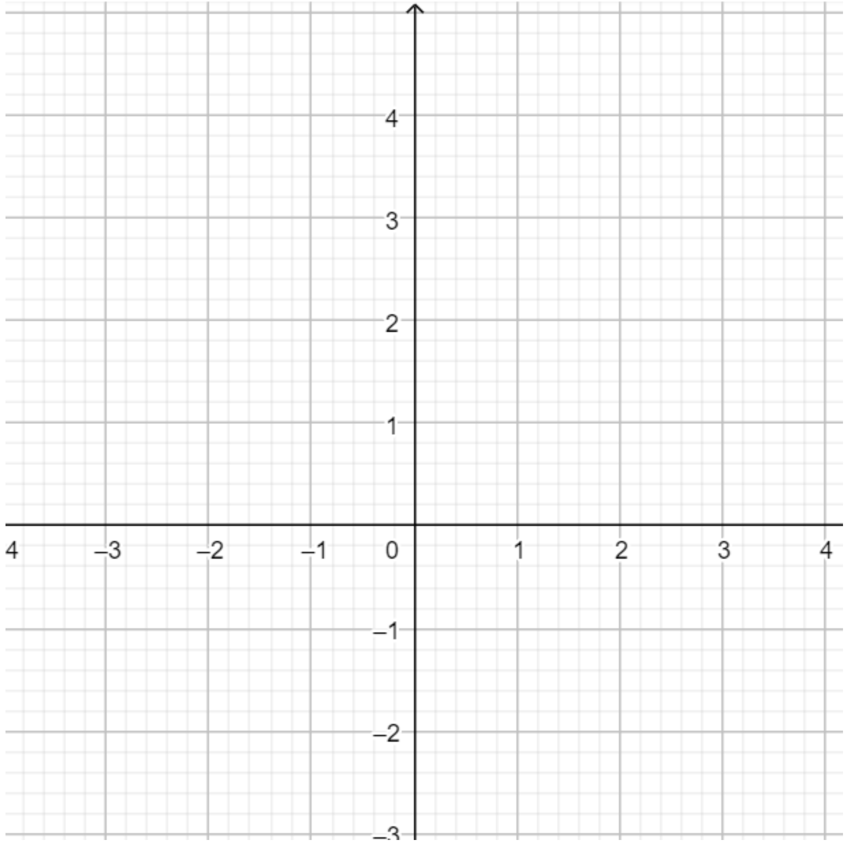
➡ *La parabole coupe l'axe des* x *en deux points : (-3,0) et (1,0).*



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 - 2x + 3$

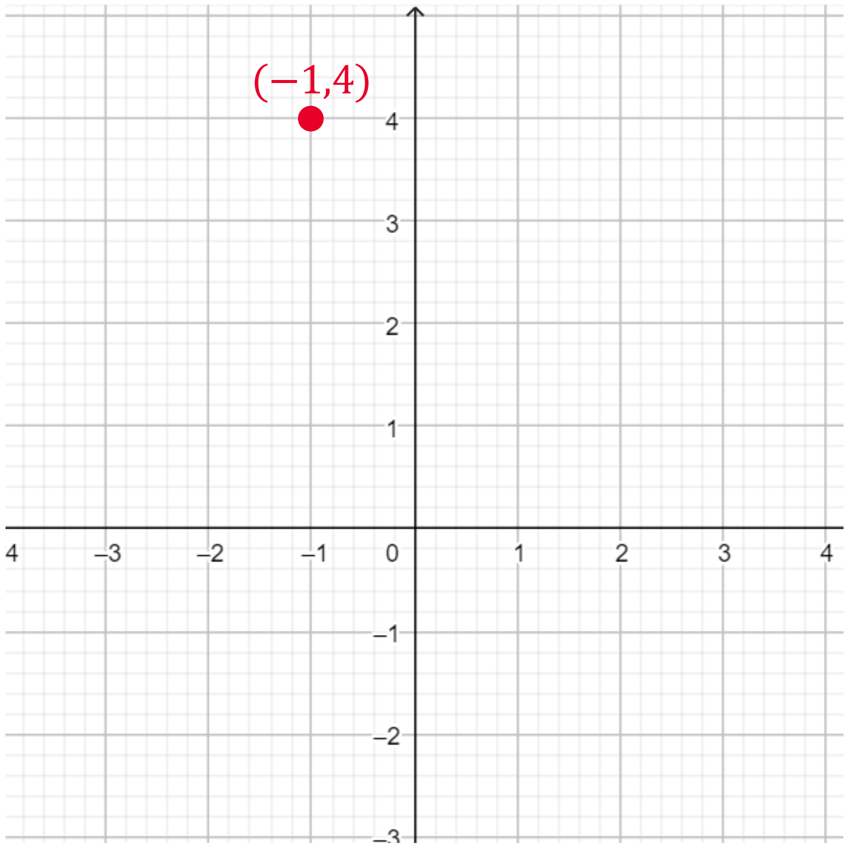


3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D’UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 - 2x + 3$

! *Le sommet de la parabole :* $x_s = -1$
$y_s = 4$



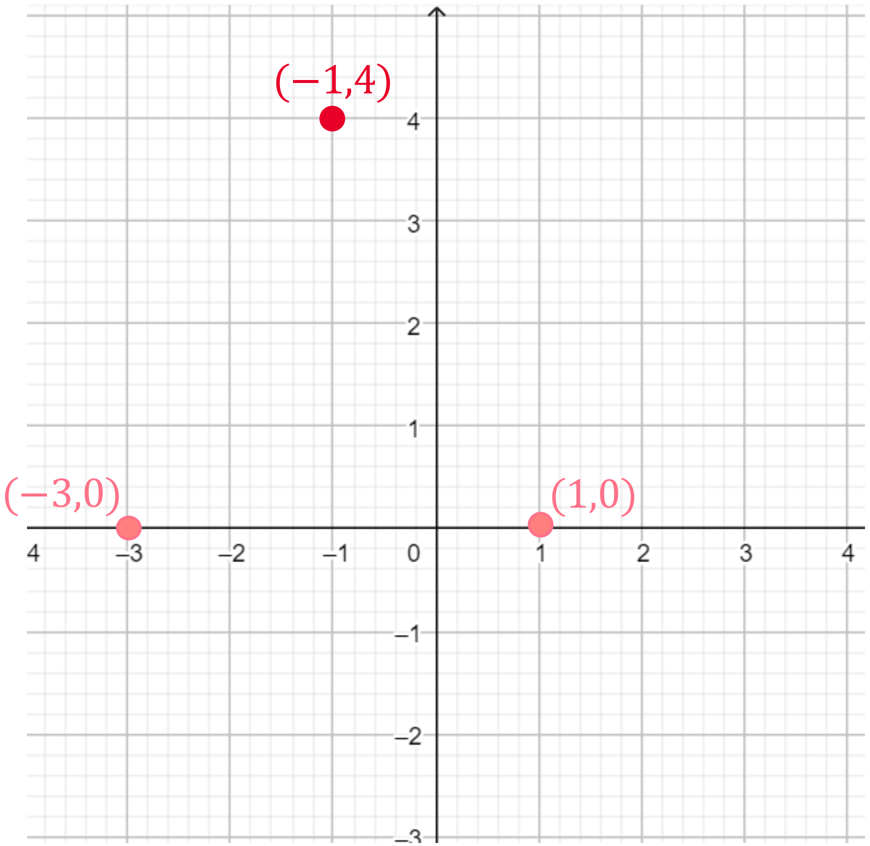
3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

Exemple : $y = -x^2 - 2x + 3$

Le sommet de la parabole : $x_s = -1$
$y_s = 4$

La parabole coupe l'axe des x en deux points : (-3,0) et (1,0).



3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

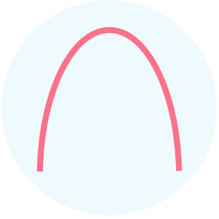
Exemple : $y = -x^2 - 2x + 3$

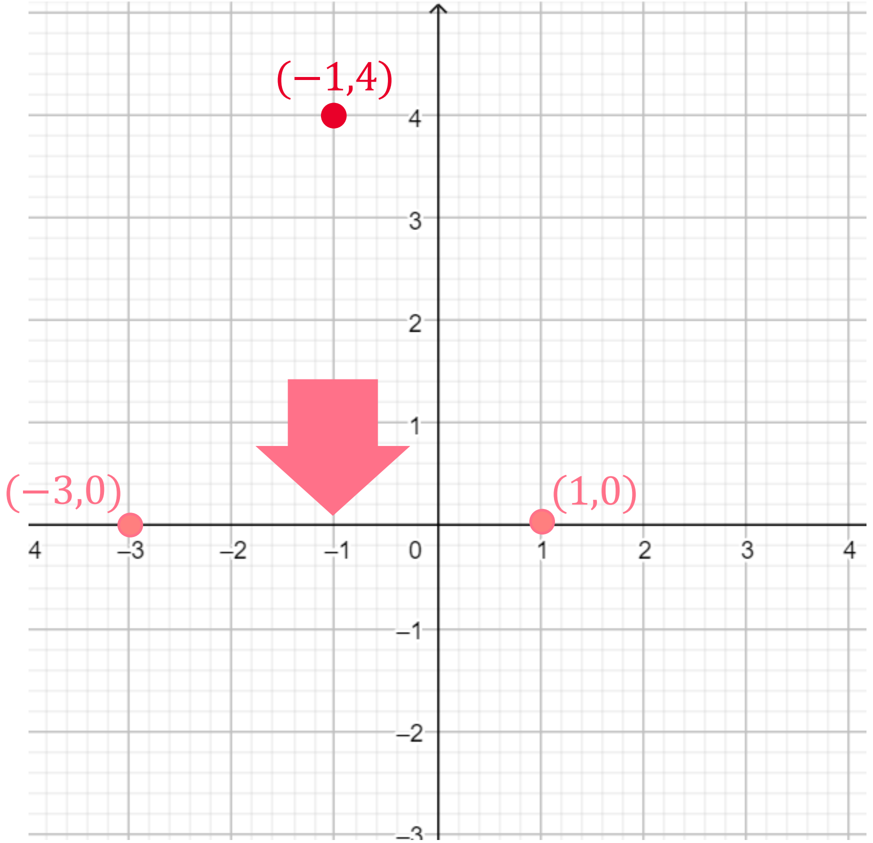
Le sommet de la parabole : $x_s = -1$
$y_s = 4$

La parabole coupe l'axe des x en deux points : (-3,0) et (1,0).

$a = -1 < 0$

➡ *La parabole est ouverte vers le bas.*





3 PARABOLE ET RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE À UNE VARIABLE

Traçons la parabole!

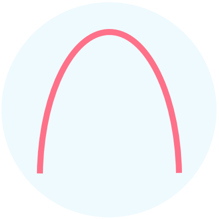
Exemple : $y = -x^2 - 2x + 3$

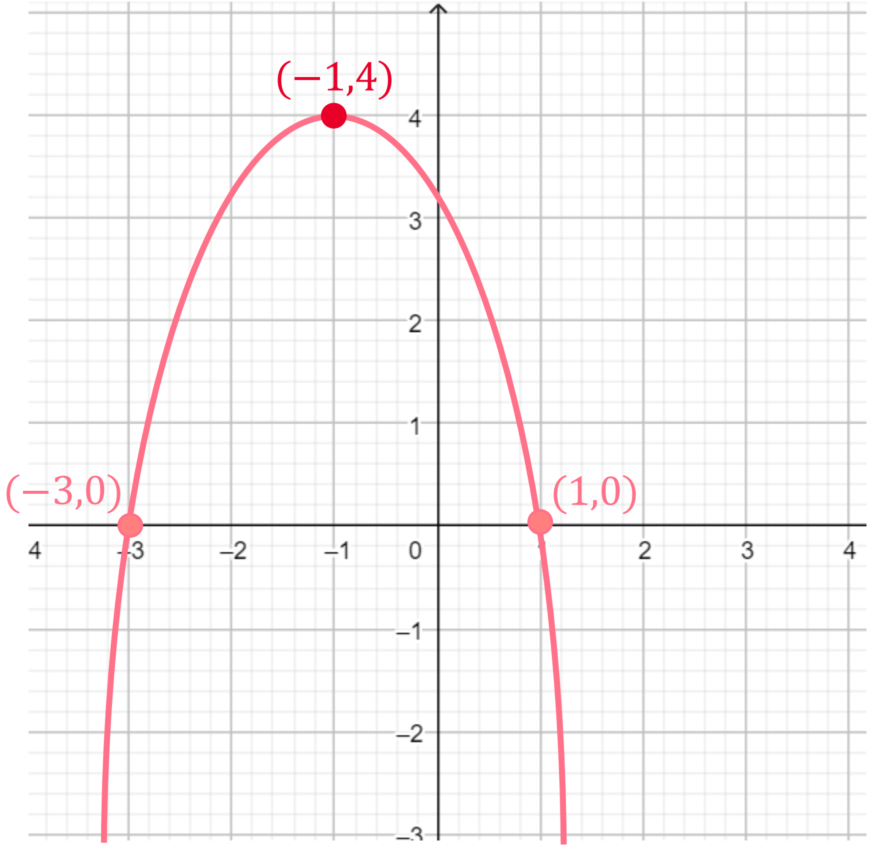
Le sommet de la parabole : $x_s = -1$, $y_s = 4$

La parabole coupe l'axe des x en ces points : (-3,0) et (1,0).

$a = -1 < 0$

➡ La parabole est ouverte vers le bas.





RÉSUMÉ RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS QUADRATIQUES À UNE VARIABLE

RÉSUMÉ RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS QUADRATIQUES À UNE VARIABLE

1 **Équation quadratique** à une variable : $ax^2 + bx + c = 0$, *où* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *et* $a \neq 0$.

RÉSUMÉ RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS QUADRATIQUES À UNE VARIABLE

1	**Équation quadratique** à une variable : $ax^2 + bx + c = 0$, *où* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *et* $a \neq 0$.
2	Techniques de résolution d'une équation quadratique :

RÉSUMÉ RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS QUADRATIQUES À UNE VARIABLE

1

Équation quadratique à une variable : $ax^2 + bx + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

2

Techniques de résolution d'une équation quadratique :

- Résolution par la **formule quadratique** : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

RÉSUMÉ RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS QUADRATIQUES À UNE VARIABLE

1

Équation quadratique à une variable : $ax^2 + bx + c = 0$, *où* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *et* $a \neq 0$.

2

Techniques de résolution d'une équation quadratique :

- Résolution par la **formule quadratique** : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Résolution par application de la **racine carrée** :

$$A^2 = B \Leftrightarrow A = \pm\sqrt{B},\ \text{où } B \geq 0$$

RÉSUMÉ RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS QUADRATIQUES À UNE VARIABLE

1 **Équation quadratique** à une variable : $ax^2 + bx + c = 0,\ où\ a, b, c \in \mathbb{R}\ et\ a \neq 0.$

2 Techniques de résolution d'une équation quadratique :

- Résolution par la **formule quadratique** : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Résolution par application de la **racine carrée** :

  $A^2 = B \iff A = \pm\sqrt{B},\ où\, B \geq 0$
- Résolution par la **factorisation**

RÉSUMÉ RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS QUADRATIQUES À UNE VARIABLE

1

Équation quadratique à une variable : $ax^2 + bx + c = 0$, *où* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *et* $a \neq 0$.

2

Techniques de résolution d'une équation quadratique :

- Résolution par la **formule quadratique** : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Résolution par application de la **racine carrée** :

  $A^2 = B \Leftrightarrow A = \pm\sqrt{B}$, *où* $B \geq 0$
- Résolution par la **factorisation**

Exemple

$x^2 - 9 = 0$

RÉSUMÉ RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS QUADRATIQUES À UNE VARIABLE

1 **Équation quadratique** à une variable : $ax^2 + bx + c = 0$, *où* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *et* $a \neq 0$.

2 Techniques de résolution d'une équation quadratique :

- Résolution par la **formule quadratique** : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Résolution par application de la **racine carrée** :

  $A^2 = B \Leftrightarrow A = \pm\sqrt{B}$, *où* $B \geq 0$
- Résolution par la **factorisation**

Exemple

$x^2 - 9 = 0$

3 $x^2 + B^2 = 0,\ B \neq 0 \longrightarrow$ Cette équation **n'admet aucune solution réelle** $S = \emptyset$

RÉSUMÉ RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS QUADRATIQUES À UNE VARIABLE

4 Le graphe de $y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$ est une **parabole**.

RÉSUMÉ RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS QUADRATIQUES À UNE VARIABLE

4 Le graphe de $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ est une **parabole**.

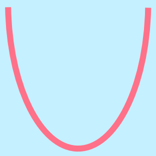
5 Le **sommet** de la parabole : $x_s = -\frac{b}{2a}$ et $y_s = ax_s^2 + bx_s + c$

RÉSUMÉ RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS QUADRATIQUES À UNE VARIABLE

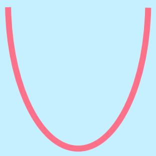
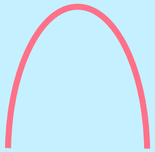
4 Le graphe de $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ est une **parabole**.

5 Le **sommet** de la parabole : $x_s = -\frac{b}{2a}$ et $y_s = ax_s^2 + bx_s + c$

6 Si $a > 0$, alors la parabole est ouverte vers le haut (*convexe*).



RÉSUMÉ RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS QUADRATIQUES À UNE VARIABLE

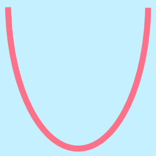
4	Le graphe de $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ est une **parabole**.
5	Le **sommet** de la parabole : $x_s = -\dfrac{b}{2a}$ et $y_s = ax_s^2 + bx_s + c$
6	Si $a > 0$, alors la parabole est ouverte vers le haut (*convexe*).  Si $a < 0$, alors la parabole est ouverte vers le bas (*concave*). 

RÉSUMÉ RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS QUADRATIQUES À UNE VARIABLE

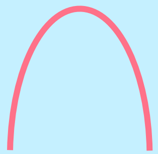
4 Le graphe de $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ est une **parabole**.

5 Le **sommet** de la parabole : $x_S = -\dfrac{b}{2a}$ et $y_S = ax_S^2 + bx_S + c$

6 Si $a > 0$, alors la parabole est ouverte vers le haut (*convexe*).



Si $a < 0$, alors la parabole est ouverte vers le bas (*concave*).



7

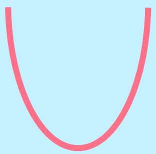
- Si $\Delta < 0$, alors la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

RÉSUMÉ RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS QUADRATIQUES À UNE VARIABLE

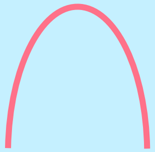
4 Le graphe de $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ est une **parabole**.

5 Le **sommet** de la parabole : $x_S = -\dfrac{b}{2a}$ et $y_S = ax_S^2 + bx_S + c$

6 Si $a > 0$, alors la parabole est ouverte vers le haut (*convexe*).



Si $a < 0$, alors la parabole est ouverte vers le bas (*concave*).



7

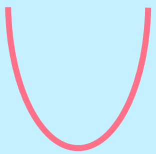
- Si $\Delta < 0$, alors la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.
- Si $\Delta = 0$, alors la parabole touche, sans la couper, l'axe des abscisses à son sommet.

RÉSUMÉ RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS QUADRATIQUES À UNE VARIABLE

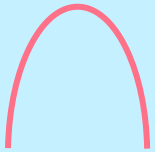
4 Le graphe de $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ est une **parabole**.

5 Le **sommet** de la parabole : $x_S = -\dfrac{b}{2a}$ et $y_S = ax_S^2 + bx_S + c$

6 Si $a > 0$, alors la parabole est ouverte vers le haut (*convexe*).

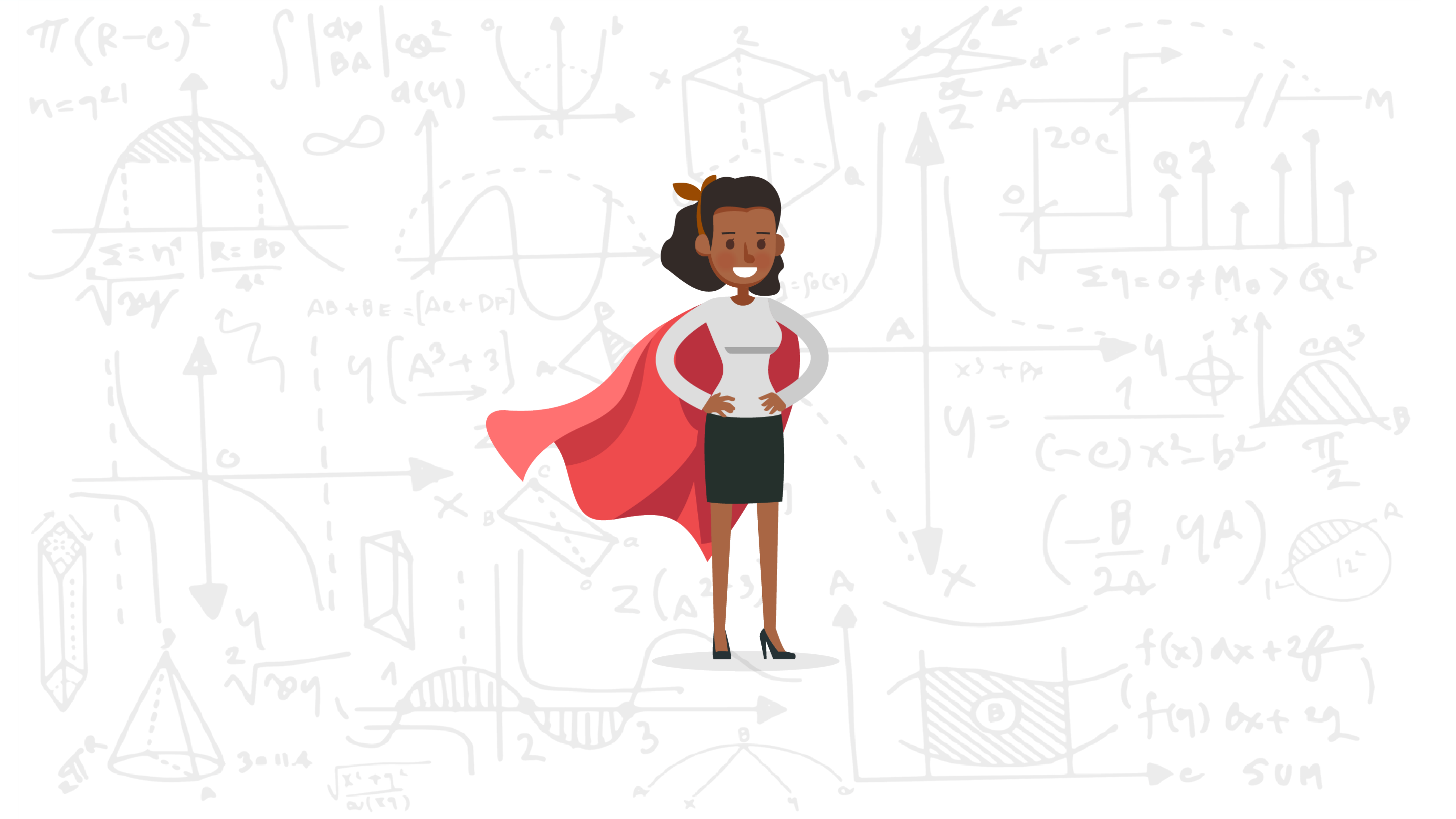


Si $a < 0$, alors la parabole est ouverte vers le bas (*concave*).



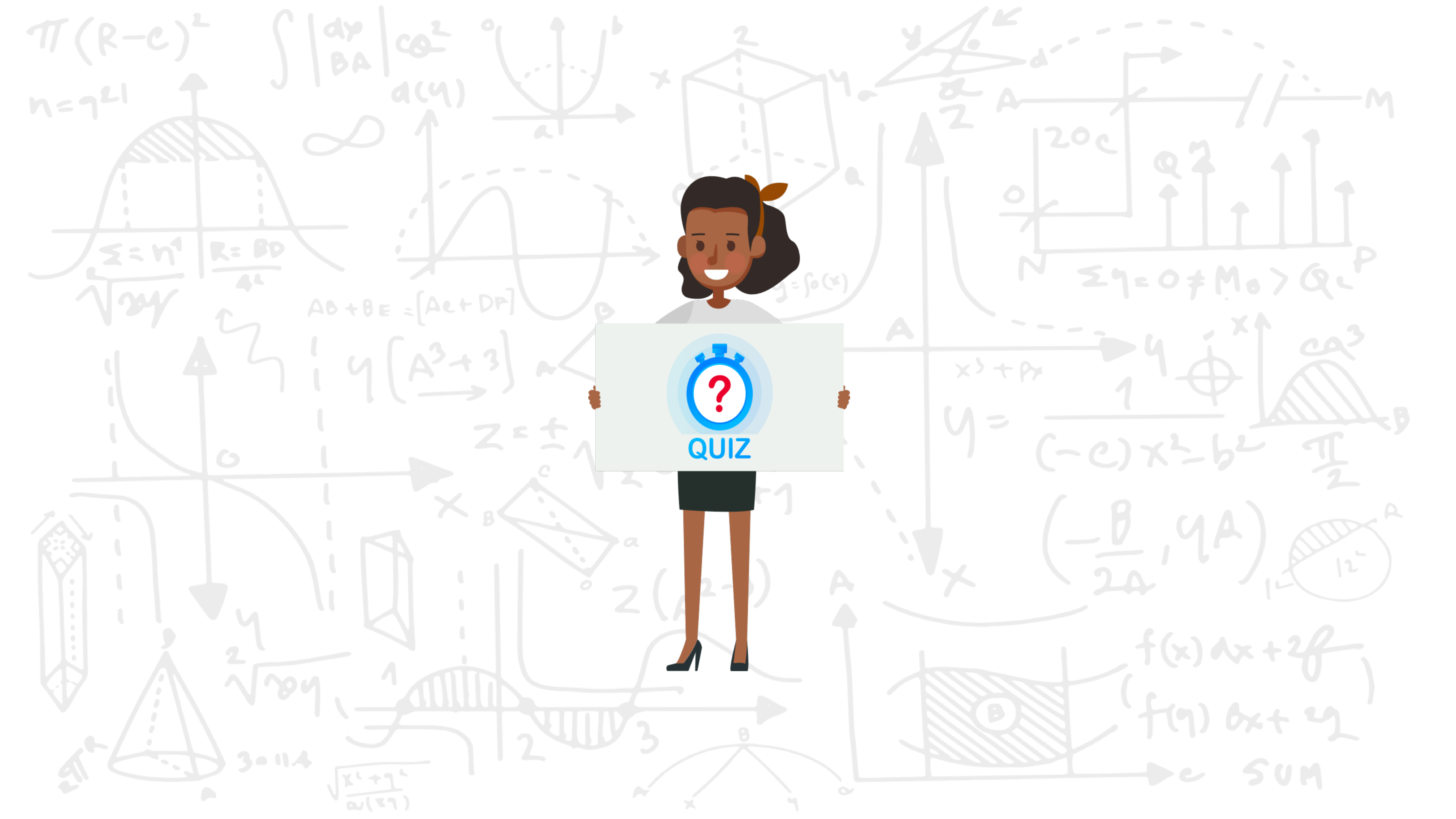
7

- Si $\Delta < 0$, alors la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.
- Si $\Delta = 0$, alors la parabole touche l'axe des abscisses à son sommet, sans le couper .
- Si $\Delta > 0$, alors la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points.



RÉFÉRENCES

- Michèle Gingras, **Mathématique d’appoint**, 5e édition, 2015, Éditeur Chenelière éducation.
- Josée Hamel, **Mise à niveau Mathématique**, 2e édition, 2017, Éditeur Pearson (ERPI)


QUIZ

HEC MONTRÉAL

DÉPARTEMENT DE SCIENCES DE LA DÉCISION

CENTRE D'AIDE EN MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE

2021

Direction de l'apprentissage et de l'innovation pédagogique

Service de l'audiovisuel