HEC MONTRÉAL

DÉPARTEMENT DE SCIENCES DE LA DÉCISION
FATIHA KACHER - Maître d'enseignement
CENTRE D'AIDE EN MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE
MICHEL KEOULA - Coordonnateur

MATHÉMATIQUES D'APPOINT

RÉSOLUTION D'INÉQUATIONS QUADRATIQUES

Résolution d’inéquations quadratiques à une variable

- Définition d’une inéquation quadratique
- Résolution d’une inéquation quadratique à une variable
- Parabole et résolution d’une inéquation quadratique à une variable

Inéquation quadratique (du second degré) à une variable

Exemple 1

- Capacité de la salle : 100 places
- Prix du billet : 15 $ s'il vend 100 billets
- Pour toute <u>augmentation</u> de 3 $ du prix du billet, il y aura une <u>diminution</u> des ventes de 4 billets.
- **Objectif : Revenu $\geq$ 2800 $**

  - Revenu = Prix du billet × Demande

Variable (inconnue)

x **: Nombre d'augmentations de 3 $ du prix initial d'un billet**

Nombre ~~de~~ d'augmentations	Prix d'un billet	Demande	Revenu
0	15 $	100	15×100
1	$15 + 3$	$100 - 4$	$(15+3)(100-4)$
2	$15 + 2 \times 3$	$100 - 2 \times 4$	$(15 + 2 \times 3)(100 - 2 \times 4)$
3	$15 + 3 \times 3$	$100 - 3 \times 4$	$(15 + 3 \times 3)(100 - 3 \times 4)$

$$Revenu = (15 + 3x)(100 - 4x)$$

Polynôme à une variable de degré 2

Pour quelles valeurs de x : $(15 + 3x)(100 - 4x) \geq 2800$?

Inéquation quadratique à une variable

Inéquation quadratique (du second degré) à une variable

Exemple 1

Revenu = Prix du billet × Demande

$$Revenu = (15 + 3x)(100 - 4x)$$

Variable (inconnue)

x **: Nombre d'augmentations de 3 $ du prix initial d'un billet**

Pour quelles valeurs de x : $(15 + 3x)(100 - 4x) \geq 2800$?

Inéquation quadratique à une variable

$$\left.\begin{array}{l} \text{Le nombre d'augmentations de 3 \$: } x \geq 0 \\ \text{Le prix d'un billet : } (15+3x) > 0, \quad \text{car } x \geq 0 \\ \text{La demande : } (100-4x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 25 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 25$$

Domaine : $[0, 25]$

Inéquation quadratique (du second degré) à une variable

<u>Une</u> inéquation quadratique à une variable est une inéquation qui peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :

$$ax^2+bx+c\leq 0\ ,\ \ ax^2+bx+c\geq 0\ ,\ \ ax^2+bx+c<0\ ,\ \ ax^2+bx+c>0$$

où x est la variable (l'inconnue), $a,\ b, c\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$

$$(15+3x)(100-4x)\geq 2800 \Leftrightarrow -12x^2+240x+1500\geq 2800$$

Développement du produit

$$\Leftrightarrow -12x^2+240x+1500-2800\geq 0$$

Soustraction de 2800 aux deux membres

$$\Leftrightarrow -12x^2+240x-1300\geq 0$$

$a=-12$

$b=240$

$c=-1300$

Inéquation quadratique à une variable

Inéquation quadratique (du second degré) à une variable

Exemple 1 **Objectif : Revenu $\geq$ 2800 $**

Domaine : $x \in [0, 25]$

$$(15+3x)(100-4x) \geq 2800 \quad \Leftrightarrow -12x^2 + 240x - 1300 \geq 0$$

$$a = -12$$
$$b = 240$$
$$c = -1300$$

<u>Étape 1</u> : **Résoudre l'équation** $-12x^2 + 240x - 1300 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -4800 < 0$$

Rappel **Factorisation** $P = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

- Si $\Delta < 0 \Rightarrow P$ n'admet pas de racines réelles.
- On ne peut pas factoriser P dans $\mathbb{R}$.

<u>Étape 2</u> : **Le signe du polynôme**

$$-12x^2 + 240x - 1300 = \underbrace{-12\underbrace{\left((x-10)^2 + \frac{100}{12}\right)}_{>0}}_{<0} < 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Lien vers le document complémentaire : Complétion de carré

Inéquation quadratique (du second degré) à une variable

Exemple 1

Étape 3 : **Ensemble solution**

Objectif : Revenu $\geq$ 2800 $

Domaine : $x \in [0, 25]$

$$\Leftrightarrow \text{Résoudre} \ : \ -12x^2 + 240x - 1300 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Résoudre} \ : \ -12\left(\left(x-10\right)^2 + \frac{100}{12}\right) \geq 0$$

$$-12x^2 + 240x - 1300 = -12\left(\left(x-10\right)^2 + \frac{100}{12}\right) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{S = \varnothing}$$

Étape 4 : **Conclusion**

- Aucun nombre d'augmentations de 3 $ du prix initial ne peut garantir un revenu de 2800 $ ou plus.
- Aucun prix du billet , dû à des augmentations de 3 $ du prix initial, ne peut garantir un revenu de 2800 $ ou plus.

Inéquation quadratique (du second degré) à une variable

Exemple 2 **Objectif : Revenu $>$ 2700 \$**

Domaine : $x \in [0, 25]$

$$(15+3x)(100-4x) > 2700 \quad \Leftrightarrow -12x^2 + 240x - 1200 > 0$$

$a = -12$

$b = 240$

$c = -1200$

Rappel **Factorisation** $P = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

- Si $\Delta = 0 \Rightarrow P$ admet une racine double $r_o = -\dfrac{b}{2a}$.
- $P = a(x - r_o)^2$

<u>Étape 1</u> **Résoudre l'équation** $-12x^2 + 240x - 1200 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

Le polynôme $-12x^2 + 240x - 1200$ admet la racine double $r_o = -\dfrac{b}{2a} = 10$

<u>Étape 2</u> **: Signe du polynôme**

$$-12x^2 + 240x - 1200 = -12(x-10)^2 \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Inéquation quadratique (du second degré) à une variable

Exemple 3 **Objectif : Revenu $>$ 2700 $**

Domaine : $x \in [0, 25]$

Étape 3 Ensemble solution

Revenu $>$ 2700 $ $\Leftrightarrow$ Résoudre : $-12(x-10)^2 > 0$

Domaine : $x \in [0, 25]$

Or : $-12(x-10)^2 \leq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{S = \varnothing}$$

Étape 4 : Conclusion

- Aucune augmentation de 3 $ du prix initial ne peut garantir un revenu supérieur à 2700 $,
- Aucun prix du billet , dû à des augmentations de 3 $ du prix initial, ne peut garantir un revenu supérieur à 2700 $

Inéquation quadratique (du second degré) à une variable

Exemple 4 **Objectif : Revenu $\geq$ 2700 \$**

Domaine : $x \in [0, 25]$

Étape 3 Ensemble solution

Revenu $\geq$ 2700 \$ $\Leftrightarrow$ Résoudre : $-12(x-10)^2 \geq 0$

Domaine : $x \in [0, 25]$

Or : $-12(x-10)^2 \leq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{10 \in [0, 25] \Rightarrow S = \{10\}}$$

Étape 4 : Conclusion

- Il faudra 10 augmentations pour assurer un revenu de 2700 \$
- Prix du billet $= 15 + 3(10) = 45$ \$

Résolution d'une inéquation quadratique à une variable

Exemple 5 **Objectif : Revenu $\geq$ 2400 $**

Domaine : $x \in [0, 25]$

Revenu $\geq$ 2400 $ $\Leftrightarrow -12x^2 + 240x - 900 \geq 0$

$a = -12$

$b = 240$

$c = -900$

Étape 1 : **Résoudre l'équation** $-12x^2 + 240x - 900 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 14400 > 0$

$x_1 = 5$

$x_2 = 15$

Rappel **Factorisation** $P = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

- Si $\Delta > 0 \Rightarrow P$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2.
- $P = a(x - x_1)(x - x_2)$

$-12x^2 + 240x - 900 = -12(x-5)(x-15)$

Résolution d’une inéquation quadratique à une variable

Exemple 5 **Objectif : Revenu $\geq$ 2400 \$** $\Leftrightarrow -12(x-5)(x-15) \geq 0$

Domaine : $x \in [0, 25]$

__Étape 2__ **: Signe du polynôme**

$$P = -12(x-5)(x-15)$$

x	$-\infty$		5		15		∞
$x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-15$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-5)(x-15)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$-12(x-5)(x-15)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Racines du polynôme

$x-5<0 \Leftrightarrow x<5$ et $x-5>0 \Leftrightarrow x>5$

$x-15<0 \Leftrightarrow x<15$ et $x-15>0 \Leftrightarrow x>15$

Règle des signes

$(+)\times(+)\rightarrow(+)$

$(-)\times(-)\rightarrow(+)$

$(+)\times(-)\rightarrow(-)$

$(-)\times(+)\rightarrow(-)$

$$(x-5)(x-15) \geq 0 \Rightarrow \quad S = [5, 15]$$

Résolution d'une inéquation quadratique à une variable

Exemple 5

Objectif : Revenu $\geq \mathbf{2400}\ \$ \Leftrightarrow -12(x-5)(x-15) \geq 0$

$\Leftrightarrow -12(x-5)(x-15) \geq 0$

Étape 3 : Ensemble solution

$$\begin{cases} -12(x-5)(x-15) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [5,15] \\ x \in \mathbb{N} \\ Domaine : x \in [0,25] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x \in S_{contexte} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}}$$

Étape 4 : Conclusion

$$\boxed{\text{Prix} = 15 + 3x \in \{30, 33, 36, 39, \ldots, 57, 60\}}$$

Résolution d’une inéquation quadratique à une variable

Exemple 6

Objectif : Revenu $> 2400\ \$ \quad \Leftrightarrow -12(x-5)(x-15) > 0$

Domaine : $x \in [0, 25]$

Étape 3 **: Ensemble solution**

$$\begin{cases} -12(x-5)(x-15) > 0 \Leftrightarrow x \in]5,15[\\ x \in \mathbb{N} \\ Domaine : x \in [0, 25] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x \in S_{contexte} = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}}$$

Étape 4 **: Conclusion**

$$\boxed{\text{Prix} = 15 + 3x \in \{33, 36, 39, \ldots, 57\}}$$

Aide mémoire

Soit le polynôme de degré 2 : $P = ax^2 + bx + c$, où $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Pour résoudre une inéquation quadratique : $P \leq 0$, $P < 0$, $P \geq 0$ ou $P > 0$

Étape 1 : Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

Étape 2 : Étude du signe de *P*

- Si $\Delta \leq 0$, alors *P* est de même signe que a
  - Si $a < 0 \Rightarrow P \leq 0$
  - Si $a > 0 \Rightarrow P \geq 0$
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles : x_1 et x_2 (supposons que $x_1 < x_2$)

	x_1		x_2	
P est de même signe que a		P est de signe contraire à a		P est de même signe que a
Si $a > 0 \Rightarrow P > 0$ Si $a < 0 \Rightarrow P < 0$		Si $a > 0 \Rightarrow P < 0$ Si $a < 0 \Rightarrow P > 0$		Si $a > 0 \Rightarrow P > 0$ Si $a < 0 \Rightarrow P < 0$

Étape 3 : Décrire l'ensemble solution

Étape 4 : Conclusion

Parabole : résolution d'une inéquation quadratique à une variable

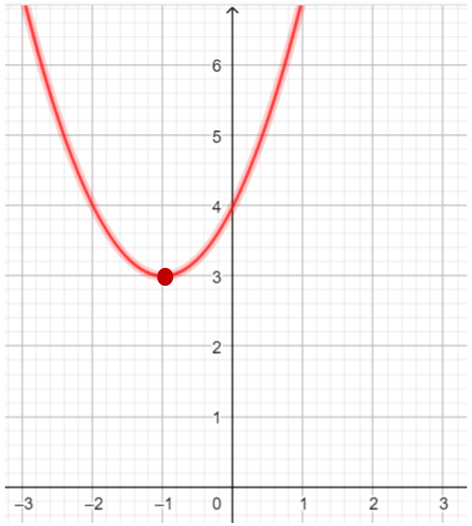
Soit le polynôme de degré 2 : $P = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

Résoudre $P \leq 0,\ P < 0,\ P \geq 0$ ou $P > 0$ ⟷ Représenter la parabole ⟷ $y = ax^2 + bx + c$

Exemple 7 Résoudre l'inéquation $x^2 + 2x + 4 > 0$

- Le sommet de la parabole : $x_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2} = -1$ et $y_s = (-1)^2 + 2(-1) + 4 = 3$
- $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 16 = -12 < 0 \Rightarrow$ la parabole ne coupe pas l'axe des x.
- $a = 1 > 0$

$y = x^2 + 2x + 4$



$$y = x^2 + 2x + 4 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{x^2 + 2x + 4 > 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}}$$

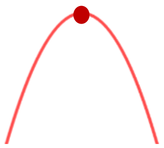
Parabole : résolution d’une inéquation quadratique à une variable

Exemple 8 Résoudre l’inéquation $-x^2+4x-4\geq 0$

- Le sommet de la parabole : $x_S=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4}{-2}=2$ et $y_s=-(2)^2+4(2)-4=0$

- $\Delta=b^2-4ac=16-16=0\Rightarrow$ la parabole touche l’axe des x au sommet $(2\ ,0)$.

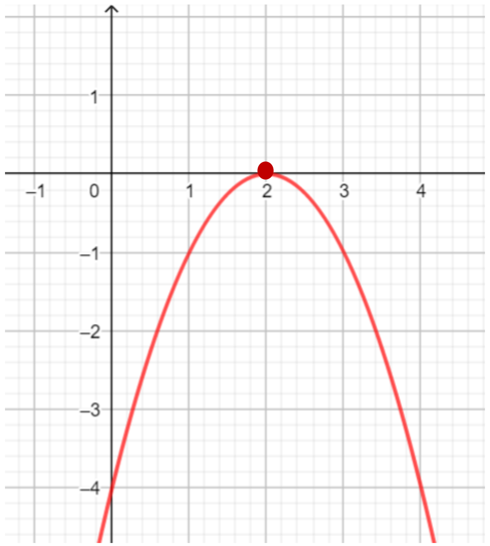
- $a\ =-1<0$



Signe du polynôme : $-x^2+4x-4\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\boxed{\text{Résoudre : } -x^2+4x-4\geq 0\Rightarrow S=\{2\}}$$

$y=-x^2+4x-4$



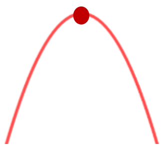
Parabole : résolution d'une inéquation quadratique à une variable

Exemple 9 Résoudre l'inéquation $-x^2-2x+3<0$

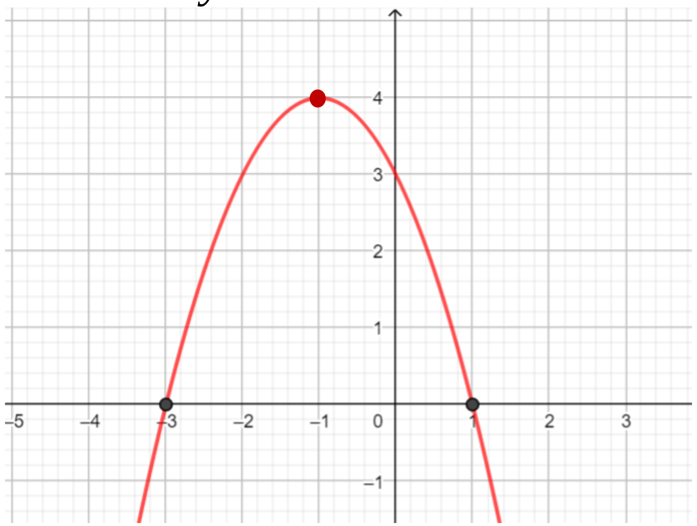
- Le sommet de la parabole : $x_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{-2} = -1$ et $y_s = -(-1)^2 - 2(-1) + 3 = 4$

- $\Delta = b^2 - 4ac = 16 > 0 \Rightarrow$ la parabole coupe l'axe des x en deux points d'abscisses

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -3$$

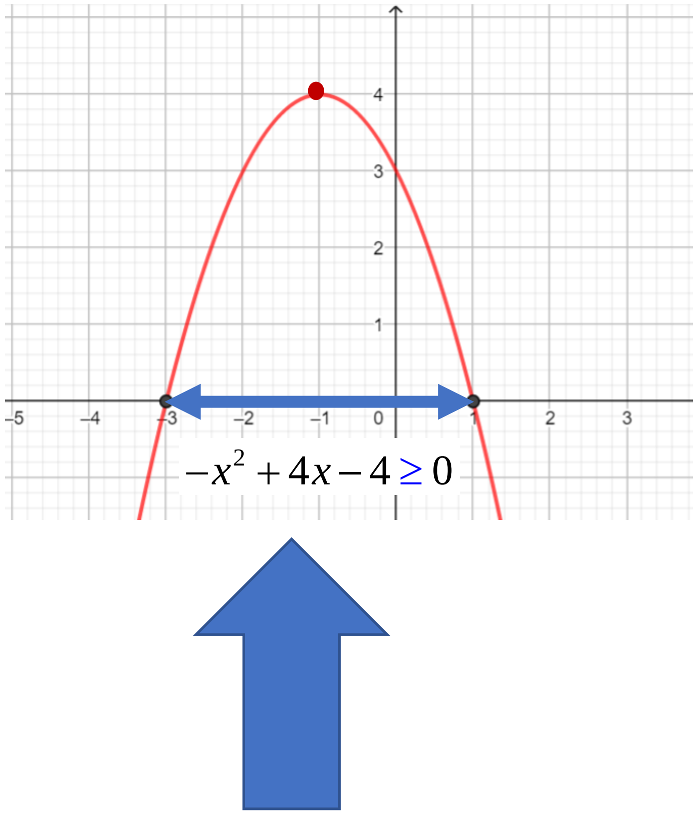
- $a = -1 < 0$ 

$y = -x^2 - 2x + 3$

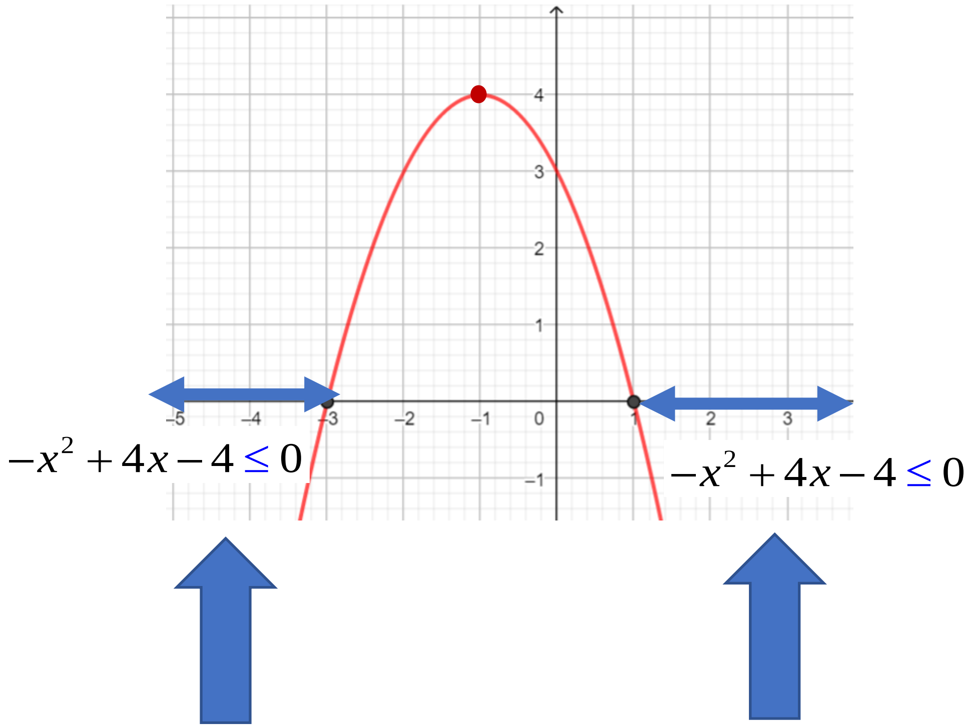


Parabole : résolution d’une inéquation quadratique à une variable

Exemple 9 Résoudre l’inéquation $-x^2-2x+3<0$



$a=-1<0$



$a=-1<0$ $a=-1<0$

Résoudre : $-x^2-2x+3<0 \Rightarrow S=\left]-\infty,-3\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

Résumé

Soit le polynôme de degré 2 : $P = ax^2 + bx + c$, où $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Pour résoudre une inéquation quadratique : $P \leq 0$, $P < 0$, $P \geq 0$ ou $P > 0$

Étape 1 : Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

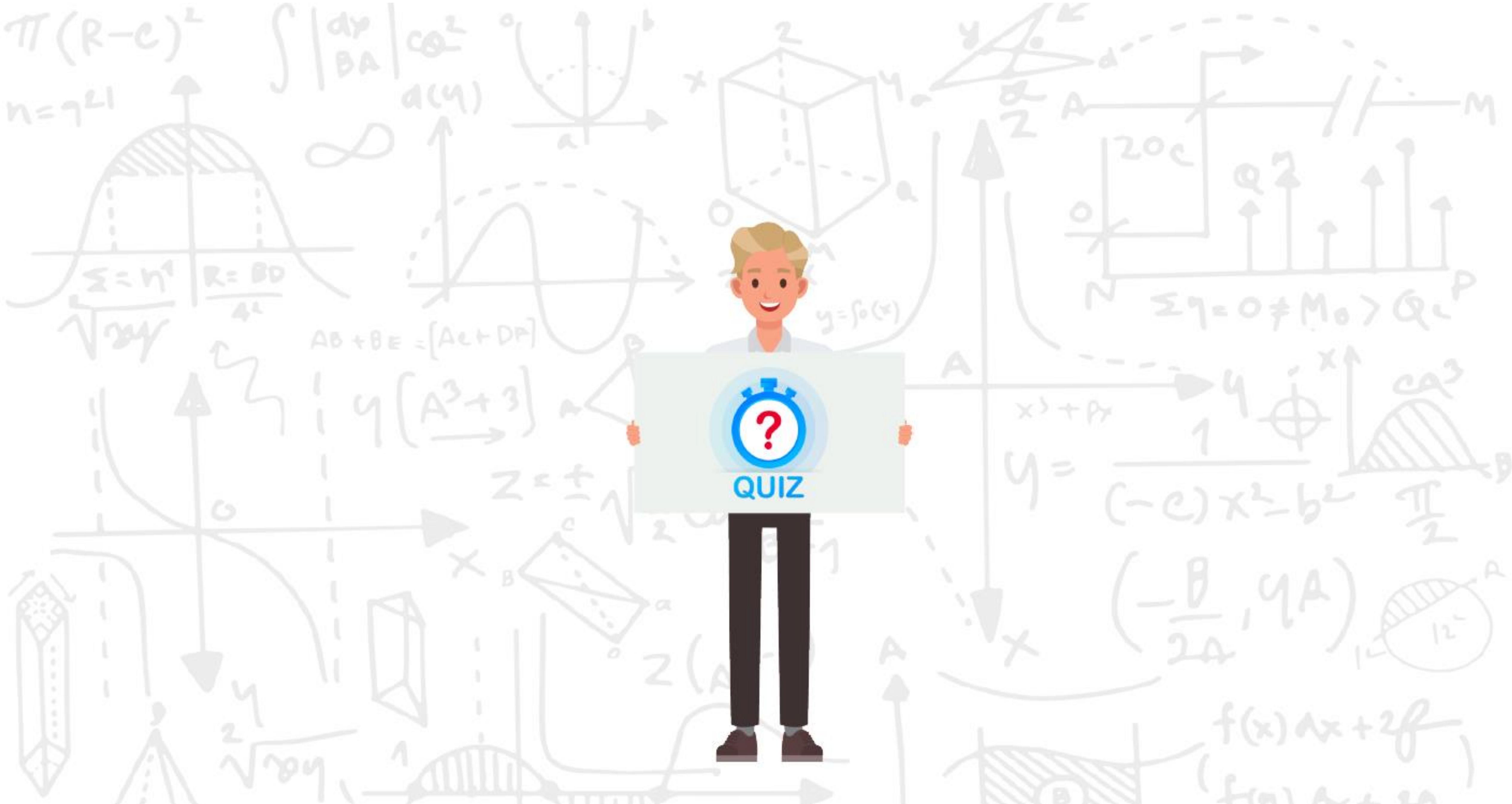
Étape 2 : Étude du signe de P ⟺ Approche graphique ou bien

- Si $\Delta \leq 0$, alors P est de même signe que a
  - Si $a < 0 \Rightarrow P \leq 0$
  - Si $a > 0 \Rightarrow P \geq 0$
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles : x_1 et x_2 (supposons que $x_1 < x_2$)

P est de même signe que a	x_1	P est de signe contraire à a	x_2	P est de même signe que a
Si $a > 0 \Rightarrow P > 0$		Si $a > 0 \Rightarrow P < 0$		Si $a > 0 \Rightarrow P > 0$
Si $a < 0 \Rightarrow P < 0$		Si $a < 0 \Rightarrow P > 0$		Si $a < 0 \Rightarrow P < 0$

Étape 3 : Décrire l'ensemble solution

Étape 4 : Conclusion


QUIZ

HEC MONTRÉAL

DÉPARTEMENT DE SCIENCES DE LA DÉCISION

CENTRE D'AIDE EN MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE

2020

Direction de l'apprentissage et de l'innovation pédagogique
Service de l'audiovisuel