HEC MONTRÉAL

Centre d'aide en Mathématiques et Statistique

FRACTIONS RATIONNELLES

SIMPLIFICATION DE FRACTIONS RATIONNELLES

- Fractions rationnelles
- Domaine d’une fraction rationnelle
- Fractions équivalentes
- Simplification de fractions rationnelles

Fractions rationnelles

$$\frac{x-3}{x^2-9} \qquad \frac{x-3}{x^2+9} \qquad \frac{x^3+2x^2+3}{x^2-6x+9}$$

Fraction rationnelle est une expression de la forme $\frac{P}{Q}$

Où P et Q sont des polynômes et $Q \neq 0$

Mise en garde

$$\frac{x^3+2x^2+3}{\sqrt{x^2-6x+9}} \qquad \sqrt{\frac{x-1}{x^2-5}}$$

Fractions algébriques

Domaine d’une fraction rationnelle

Domaine d’une fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$: ensemble des valeurs réelles pour lesquelles $Q \neq 0$

Exemple 1 Déterminer le domaine de la fraction rationnelle $\dfrac{x-3}{x^2-9}$

Étape 1 Résoudre l’équation $Q = 0$

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0$$

Factorisation : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ ou } x + 3 = 0$$

$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$$

Les valeurs qui annulent le dénominateur

Étape 2 Domaine $= \{x \in \mathbb{R} \mid Q \neq 0\} \;= \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

Domaine d'une fraction rationnelle

Exemple 2 Déterminer le domaine de la fraction rationnelle $\dfrac{x-3}{x^2+9}$

Étape 1 Résoudre l'équation $Q = 0$

$$x^2 + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 = -9$$

Contradiction

$$x^2 + 9 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Somme de carrés

Étape 2 $\boxed{\text{Domaine} = \{x \in \mathbb{R} \mid Q \neq 0\} \quad = \mathbb{R}}$

Domaine d’une fraction rationnelle

Exemple 3 Déterminer le domaine de la fraction rationnelle $\dfrac{x^2+x}{2x^3-x^2-3x}$

Étape 1 Résoudre l’équation $Q=0$

$$2x^3-x^2-3x=0 \Leftrightarrow x\left(2x^2-x-3\right)=0$$

Résolution par factorisation

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ 2x^2-x-3=0 \quad \left(\Delta>0 \ \text{ et } \ x_1=-1\,,\ x_2=\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$$

$AB=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ ou } B=0$

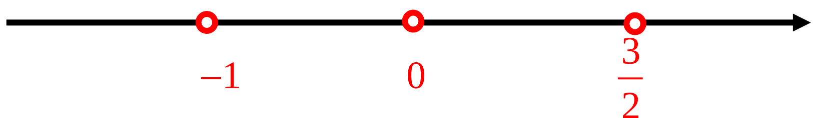
Résolution par la formule quadratique

$$\Leftrightarrow x=0\ ,\ \ x=-1 \text{ ou } x=\frac{3}{2}$$

Les valeurs qui annulent le dénominateur

Étape 2

$$\boxed{\text{Domaine}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, Q\neq 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{-1,0,\frac{3}{2}\right\}}$$



Fractions rationnelles équivalentes

$$0,8 = \frac{12}{15} \quad = \quad \frac{4}{5} = 0,8$$

Fractions rationnelles équivalentes

Deux fractions rationnelles sont équivalentes si elles donnent la même valeur numérique lorsqu'on remplace x par un nombre appartenant à l'intersection des domaines des deux fractions.

Fractions rationnelles équivalentes

Exemple 4 Les deux fractions sont – elles équivalentes : $\dfrac{x-3}{x^2-9}$ et $\dfrac{1}{x-1}$

Domaine de $\dfrac{x-3}{x^2-9}$: $\mathbb{R} \setminus \{-3,3\}$

Domaine de $\dfrac{1}{x-1}$: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

L'intersection des deux domaines : $\mathbb{R} \setminus \{-3,1,3\}$

Pour $x = 0 \in \mathbb{R} \setminus \{-3,1,3\}$

La valeur de $\dfrac{x-3}{x^2-9}$ en $x = 0$: $\dfrac{0-3}{0^2-9} = \dfrac{1}{3}$

La valeur de $\dfrac{1}{x-1}$ en $x = 0$: $\dfrac{1}{0-1} = -1$

Les deux fractions ne sont pas équivalentes

$$\frac{x-3}{x^2-9} \neq \frac{1}{x-1}$$

Simplification d’une fraction rationnelle

$$0,8 = \frac{12}{15} = \frac{\cancel{3}\times 4}{\cancel{3}\times 5} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Simplification de fractions rationnelles

- **Domaine** de la fraction dénominateur

- **Factorisation**, si possible, du numérateur et du dénominateur

- **Simplification**, si possible, des termes communs au numérateur et au dénominateur (**Diviser** le numérateur et le dénominateur par les facteurs communs **non nuls**)

Simplification d'une fraction rationnelle

Exemple 5 Simplifier la fraction rationnelle $\dfrac{x-3}{x^2-9}$

<u>Étape 1</u> **Domaine** $=\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$ (voir l'exemple 1)

<u>Étape 2</u> **Factorisation** du numérateur et du dénominateur : $\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)}$

$\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$

<u>Étape 3</u> **Division** par le facteur commun non nul $\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{\cancel{x-3}}{(x+3)\cancel{(x-3)}}$

<u>Étape 4</u> **Fractions équivalentes** $\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{x+3}$, si $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$

Simplification d’une fraction rationnelle

Exemple 6 Simplifier la fraction rationnelle $\dfrac{x^2+x}{2x^3-x^2-3x}$

Étape 1 **Domaine** $=\mathbb{R}\setminus\left\{-1,0,\dfrac{3}{2}\right\}$ (voir l'exemple 3)

Étape 2 **Factorisation** du numérateur et du dénominateur

- Factorisation du dénominateur

$$2x^3-x^2-3x=x\left(2x^2-x-3\right)$$

$$=2x\left(x+1\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

Mise en évidence simple

Factorisation du polynôme de degré deux admettant deux racines réelles

- Factorisation du numérateur

$$x^2+x=x\left(x+1\right)$$

Mise en évidence simple

Étape 3 **Division** par les facteurs communs non nuls

$$\frac{x^2+x}{2x^3-x^2-3x}=\frac{\cancel{x}\cancel{\left(x+1\right)}}{2\cancel{x}\cancel{\left(x+1\right)}\left(x-\frac{3}{2}\right)}$$

Étape 4 **Fractions équivalentes**

$$\frac{x^2+x}{2x^3-x^2-3x}=\frac{1}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\frac{1}{2x-3}\quad,\ \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1,0,\frac{3}{2}\right\}$$

Simplification d'une fraction rationnelle

Exemple 7 Simplifier la fraction rationnelle $\dfrac{x-3}{x^2+9}$

On ne peut pas simplifier la fraction

<u>Étape 1</u> **Domaine** $=\mathbb{R}$ (voir l'exemple 2)

<u>Étape 2</u> **Factorisation** du numérateur et du dénominateur

- Factorisation du dénominateur

Comme $x^2+9\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R},$ le polynôme est irréductible dans $\mathbb{R}$

Mise en garde

$$\frac{\cancel{x}-3}{\cancel{x}^2+9}=\frac{1-3}{x+9}=\frac{-2}{x+9}$$

Faux

Résumé

- **Fraction rationnelle** est une expression de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont des polynômes et $Q \neq 0$

- Pour simplifier une fraction :

  - **Domaine** de la fraction dénominateur
  - **Factorisation**, si possible, du numérateur et du dénominateur
  - **Simplification**, si possible, des termes communs au numérateur et au dénominateur (**Diviser** le numérateur et le dénominateur par les facteurs communs **non nuls**)

- Le processus de simplification d'une fraction aboutit à une fraction équivalente à la fraction initiale dans le domaine de cette fraction initiale

Références

- Michèle Gingras, Mathématiques d'appoint, 5e édition, 2015, Édition Chenelière éducation
- Josée Hamel, Mise à niveau Mathématiques, 2e édition, 2017, Éditions du Renouveau pédagogique (ERPI)