

MATHÉMATIQUES D'APPOINT

FRACTIONS RATIONNELLES



SIMPLIFICATION DE FRACTIONS RATIONNELLES

- Fractions rationnelles
- Domaine d'une fraction rationnelle
- Fractions équivalentes
- Simplification de fractions rationnelles

Fractions rationnelles

$$\frac{x-3}{x^2-9}$$

$$\frac{x-3}{x^2+9}$$

$$\frac{x^3+2x^2+3}{x^2-6x+9}$$

$$\frac{x^3+2x^2+3}{\sqrt{x^2-6x+9}}$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{x^2-5}}$$

Fraction rationnelle est une expression de la forme $\frac{P}{Q}$

Où P et Q sont des polynômes et $Q \neq 0$

Mise en garde

Fractions algébriques

Domaine d'une fraction rationnelle

Domaine d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$: ensemble des valeurs réelles pour lesquelles $Q \neq 0$

Exemple 1 Déterminer le domaine de la fraction rationnelle $\frac{x-3}{x^2-9}$

Étape 1 Résoudre l'équation $Q = 0$

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-3 = 0 \text{ ou } x+3 = 0$$

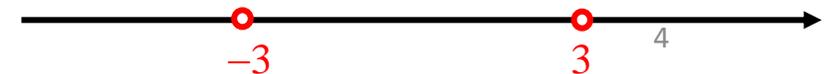
$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$$

Factorisation : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$

Les valeurs qui annulent le dénominateur

Étape 2 $\text{Domaine} = \{x \in \mathbb{R} \mid Q \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$



Domaine d'une fraction rationnelle

Exemple 2 Déterminer le domaine de la fraction rationnelle $\frac{x-3}{x^2+9}$

Étape 1 Résoudre l'équation $Q = 0$

$$x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9$$

$$x^2 + 9 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

← Contradiction

← Somme de carrés

Étape 2 Domaine = $\{x \in \mathbb{R} \mid Q \neq 0\} = \mathbb{R}$

Domaine d'une fraction rationnelle

Exemple 3 Déterminer le domaine de la fraction rationnelle $\frac{x^2 + x}{2x^3 - x^2 - 3x}$

Étape 1 Résoudre l'équation $Q = 0$

$$2x^3 - x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 - x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \end{cases}$$

$$2x^2 - x - 3 = 0 \left(\Delta > 0 \text{ et } x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow x = 0, x = -1 \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$

Résolution par factorisation

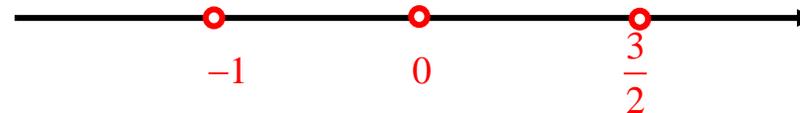
$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$

Résolution par la formule quadratique

Les valeurs qui annulent le dénominateur

Étape 2

$$\text{Domaine} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid Q \neq 0 \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -1, 0, \frac{3}{2} \right\}$$



Fractions rationnelles équivalentes

$$0,8 = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0,8$$


Fractions rationnelles équivalentes

Deux fractions rationnelles sont **équivalentes** si elles donnent la même valeur numérique lorsqu'on remplace x par un nombre appartenant à l'intersection des domaines des deux fractions.

Fractions rationnelles équivalentes

Exemple 4 Les deux fractions sont – elles équivalentes : $\frac{x-3}{x^2-9}$ et $\frac{1}{x-1}$

Domaine de $\frac{x-3}{x^2-9} : \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$



L'intersection des deux domaines : $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 3\}$

Domaine de $\frac{1}{x-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Pour $x = 0 \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 3\}$

La valeur de $\frac{x-3}{x^2-9}$ en $x = 0 : \frac{0-3}{0^2-9} = \frac{1}{3}$

La valeur de $\frac{1}{x-1}$ en $x = 0 : \frac{1}{0-1} = -1$

Les deux fractions ne sont pas équivalentes

$\frac{x-3}{x^2-9} \neq \frac{1}{x-1}$

Simplification d'une fraction rationnelle

$$0,8 = \frac{12}{15} = \frac{\cancel{3} \times 4}{\cancel{3} \times 5} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Simplification de fractions rationnelles

- **Domaine** de la fraction dénominateur 
- **Factorisation**, si possible, du numérateur et du dénominateur
- **Simplification**, si possible, des termes communs au numérateur et au dénominateur (**Diviser** le numérateur et le dénominateur par les facteurs communs **non nuls**)

Simplification d'une fraction rationnelle

Exemple 5 Simplifier la fraction rationnelle $\frac{x-3}{x^2-9}$

Étape 1 **Domaine** = $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ (voir l'exemple 1)

Étape 2 **Factorisation** du numérateur et du dénominateur : $\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)}$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Étape 3 **Division** par le facteur commun non nul $\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{\cancel{x-3}}{(x+3)\cancel{(x-3)}}$

Étape 4 **Fractions équivalentes** $\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{x+3}$, si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

Simplification d'une fraction rationnelle

Exemple 6 Simplifier la fraction rationnelle $\frac{x^2 + x}{2x^3 - x^2 - 3x}$

Étape 1 **Domaine** = $\mathbb{R} \setminus \left\{ -1, 0, \frac{3}{2} \right\}$ (voir l'exemple 3)

Étape 2 **Factorisation** du numérateur et du dénominateur

- Factorisation du dénominateur

$$2x^3 - x^2 - 3x = x(2x^2 - x - 3)$$

Mise en évidence simple

$$= 2x(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Factorisation du polynôme de degré deux admettant deux racines réelles

- Factorisation du numérateur

$$x^2 + x = x(x+1)$$

Mise en évidence simple

Étape 3 **Division** par les facteurs communs non nuls

$$\frac{x^2 + x}{2x^3 - x^2 - 3x} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{2x}(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)}$$

Étape 4 **Fractions équivalentes**

$$\frac{x^2 + x}{2x^3 - x^2 - 3x} = \frac{1}{2\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2x - 3}, \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -1, 0, \frac{3}{2} \right\}$$

Simplification d'une fraction rationnelle

Exemple 7 Simplifier la fraction rationnelle $\frac{x-3}{x^2+9}$

On ne peut pas simplifier la fraction

Étape 1 **Domaine** = \mathbb{R} (voir l'exemple 2)

Étape 2 **Factorisation** du numérateur et du dénominateur

- Factorisation du dénominateur

Comme $x^2 + 9 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, le polynôme est irréductible dans \mathbb{R}

Mise en garde

$$\frac{\cancel{x}-3}{\cancel{x^2}+9} = \frac{1-3}{x+9} = \frac{-2}{x+9}$$

Faux

Résumé

- **Fraction rationnelle** est une expression de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont des polynômes et $Q \neq 0$
- Pour simplifier une fraction :
 - **Domaine** de la fraction dénominateur
 - **Factorisation**, si possible, du numérateur et du dénominateur
 - **Simplification**, si possible, des termes communs au numérateur et au dénominateur (**Diviser** le numérateur et le dénominateur par les facteurs communs **non nuls**)
- Le processus de simplification d'une fraction aboutit à une fraction équivalente **à la fraction initiale** dans le domaine de **cette** fraction initiale



RÉFÉRENCES

- Michèle Gingras, **Mathématique d'appoint**, 5e édition, 2015, Éditeur Chenelière éducation.
- Josée Hamel, **Mise à niveau Mathématique**, 2e édition, 2017, Éditeur Pearson (ERPI)

