HEC MONTRÉAL

DÉPARTEMENT DE SCIENCES DE LA DÉCISION
FATIHA KACHER – Maître d'enseignement
CENTRE D'AIDE EN MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE
MICHEL KEOULA – Coordonnateur

MATHÉMATIQUES D'APPOINT

OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS RATIONNELLES

OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS RATIONNELLES ET RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS

- La somme de deux fractions rationnelles
- La différence de deux fractions rationnelles
- Le produit de deux fractions rationnelles
- Le quotient de deux fractions rationnelles
- Résolution d'équations à une variable contenant des fractions rationnelles

Somme de fractions rationnelles

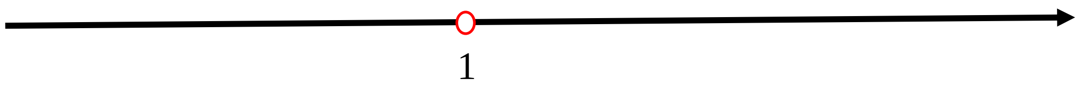
Exemple 1 Calculer $\dfrac{x}{2x-2}+\dfrac{x+1}{3x^2-3x}$

Étape 1 : Domaine de la somme

- La fraction $\dfrac{x}{2x-2}$ est définie si $2x-2\neq 0$

$$2x-2=0 \Leftrightarrow 2(x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow x=1$$

Le domaine de $\dfrac{x}{2x-2}$: $\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$



- La fraction $\dfrac{x+1}{3x^2-3x}$ est définie si $3x^2-3x\neq 0$

$$3x^2-3x=0 \Leftrightarrow 3x(x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=1$$

Le domaine de $\dfrac{x+1}{3x^2-3x}$: $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

$$\boxed{\textbf{Domaine de } \dfrac{x}{2x-2}+\dfrac{x+1}{3x^2-3x} : \mathbb{R}\setminus\{0,1\}}$$

Somme de fractions rationnelles

Étape 2 : Ramener des deux fractions au même dénominateur, soit le plus petit dénominateur commun :

$$\frac{x}{2x-2}=\frac{x}{2(x-1)}$$

$$\frac{x+1}{3x^2-3x}=\frac{x+1}{3x(x-1)}$$

Le plus petit dénominateur commun

$$2(x-1)\times 3x$$
$$=6x(x-1)$$

$$\frac{x}{2x-2}+\frac{x+1}{3x^2-3x}=\frac{3x\times x}{3x\times 2(x-1)}+\frac{2\times(x+1)}{2\times 3x(x-1)}$$

$$=\frac{3x^2+(2x+2)}{6x(x-1)}$$

$$=\frac{3x^2+2x+2}{6x(x-1)},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$$

Différence de fractions rationnelles

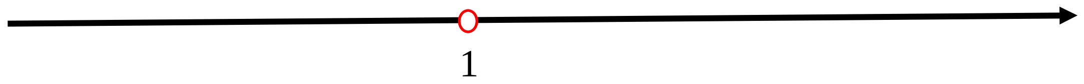
Exemple 2 Calculer $\frac{x}{x-1} - \frac{x+2}{x+1}$

Étape 1 : Domaine des deux fractions

- La fraction $\frac{x}{x-1}$ est définie si $x-1 \neq 0$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Le domaine de $\frac{x}{x-1}$: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$



- La fraction $\frac{x+2}{x+1}$ est définie si $x+1 \neq 0$

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Le domaine de $\frac{x+2}{x+1}$: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\boxed{\text{Domaine de } \frac{x}{x-1} - \frac{x+2}{x+1} : \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}}$$

Différence de fractions rationnelles

Étape 2 : Ramener des deux fractions au même dénominateur, soit le plus petit dénominateur commun :

$$\frac{x}{x-1} \qquad \frac{x+2}{x+1}$$

Le plus petit dénominateur commun

$$(x-1)\times(x+1)$$

$$\frac{x}{x-1}-\frac{x+2}{x+1}=\frac{(x+1)\times x}{(x+1)\times(x-1)}-\frac{(x-1)\times(x+2)}{(x-1)\times(x+1)}$$

$$=\frac{x^2+x}{(x+1)(x-1)}-\frac{x^2+x-2}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x^2+x-(x^2+x-2)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x^2+x-x^2-x+2}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{2}{x^2-1},x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

Produit de deux fractions

Exemple 3 Calculer $\dfrac{x+1}{x^2-9}\times\dfrac{(x+3)^2}{x^2+2x+1}$

$$\frac{P}{Q}\times\frac{R}{S}=\frac{PR}{QS}\ ,\ Q\neq 0,\ S\neq 0,$$

Étape 1 : Le domaine des deux fractions

- $\dfrac{x+1}{x^2-9}$ est définie si $x^2-9\neq 0$

$$x^2-9=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)=0$$
$$\Leftrightarrow x=3 \text{ ou } x=-3$$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$\boxed{\text{Domaine } \frac{x+1}{x^2-9}:\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}}$$

- $\dfrac{(x+3)^2}{x^2+2x+1}$ est définie si $x^2+2x+1\neq 0$

$$x^2+2x+1=0$$

$\Delta=0$ et $x=-1$ l'unique racine du polynôme

$x^2+2x+1=(x+1)^2$

$$\boxed{\text{Domaine } \frac{(x+3)^2}{x^2+2x+1}:\mathbb{R}\setminus\{-1\}}$$

$$\boxed{\text{Domaine de } \frac{x+1}{x^2-9}\times\frac{(x+3)^2}{x^2+2x+1}:\mathbb{R}\setminus\{-3,\ -1,\ 3\}}$$

Produit de deux fractions

Étape 2 : Factoriser, si possible, les numérateurs et les dénominateurs, puis simplifier

$$\frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS}\ ,\ Q \neq 0,\ S \neq 0,$$

$$\frac{x+1}{x^2-9} \times \frac{(x+3)^2}{x^2+2x+1} = \frac{x+1}{(x-3)(x+3)} \times \frac{(x+3)^2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{x+1}}{(x-3)\cancel{(x+3)}} \times \frac{\cancel{(x+3)}(x+3)}{\cancel{(x+1)}(x+1)}$$

Simplification

$$= \frac{1}{(x-3)} \times \frac{(x+3)}{(x+1)}$$

Produit

$$= \frac{x+3}{(x-3)(x-1)}\ ,\ \boxed{\text{où }\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,-1,3\}}$$

Quotient de deux fractions

$$\frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{\frac{P}{Q}}{\frac{R}{S}} = \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R} = \frac{PS}{QR},\ Q \neq 0,\ R \neq 0,\ S \neq 0$$

Le domaine de $\frac{P}{Q} \div \frac{R}{S}$, $Q \neq 0, S \neq 0$ et $R \neq 0$

Exemple 4 Calculer $\frac{x-\sqrt{5}}{x^2-3x+2} \div \frac{x^2-5}{2x^2-4x}$

$$\frac{x-\sqrt{5}}{x^2-3x+2} \div \frac{x^2-5}{2x^2-4x} = \frac{x-\sqrt{5}}{x^2-3x+2} \times \frac{2x^2-4x}{x^2-5}$$

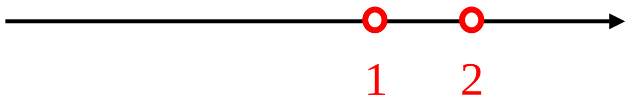
$x^2-3x+2 \neq 0$ $\quad 2x^2-4x \neq 0$ $\quad x^2-5 \neq 0$

Quotient de deux fractions

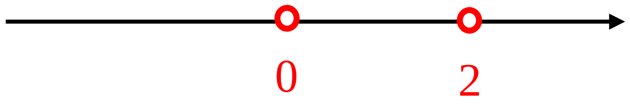
$$\frac{x-\sqrt{5}}{x^2-3x+2} \div \frac{x^2-5}{2x^2-4x} = \frac{x-\sqrt{5}}{x^2-3x+2} \times \frac{2x^2-4x}{x^2-5}$$

$$\frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{\frac{P}{Q}}{\frac{R}{S}} = \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R} = \frac{PS}{QR},\ Q \neq 0,\ R \neq 0,\ S \neq 0$$

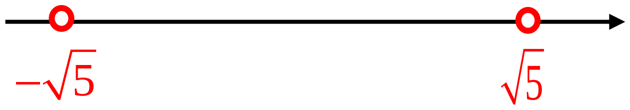
La fraction $\frac{x-\sqrt{5}}{x^2-3x+2}$ est définie si $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)\neq 0$ $\quad \boxed{\mathbb{R}\setminus\{1,2\}}$



La fraction $\frac{x^2-5}{2x^2-4x}$ est définie si $2x^2-4x=2x(x-2)\neq 0$ $\quad \boxed{\mathbb{R}\setminus\{0,2\}}$



La fraction $\frac{2x^2-4x}{x^2-5}$ est définie si $x^2-5=(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})\neq 0$ $\quad \boxed{\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\}}$



$$\boxed{\text{Domaine de } \frac{x-\sqrt{5}}{x^2-3x+2} \div \frac{x^2-5}{2x^2-4x} : \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{5},\ 0,\ 1,\ 2,\ \sqrt{5}\}}$$

Quotient de deux fractions

$$\frac{x-\sqrt{5}}{x^2-3x+2} \div \frac{x^2-5}{2x^2-4x} = \frac{x-\sqrt{5}}{x^2-3x+2} \times \frac{2x^2-4x}{x^2-5}$$

$$= \frac{\cancel{\left(x-\sqrt{5}\right)}}{\cancel{(x-2)}(x-1)} \times \frac{2x\cancel{(x-2)}}{\cancel{\left(x-\sqrt{5}\right)}\left(x+\sqrt{5}\right)}$$

$$= \frac{1}{(x-1)} \times \frac{2x}{\left(x+\sqrt{5}\right)}$$

$$= \frac{2x}{(x-1)\left(x+\sqrt{5}\right)}, \text{ où } \boxed{x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{5}, 0, 1, 2, \sqrt{5}\right\}}$$

$$\frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{\frac{P}{Q}}{\frac{R}{S}} = \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R} = \frac{PS}{QR}, \quad Q \neq 0, \; R \neq 0, \; S \neq 0$$

Résolution d'équations à une variable contenant des fractions rationnelles

<u>Rappel</u> $\dfrac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$

où $b \neq 0$

Résoudre l'équation sous la forme

$$\frac{P}{Q} = 0 \quad \Leftrightarrow P = 0$$

où $Q \neq 0$

Résolution d'équations à une variable contenant des fractions rationnelles

Exemple 5 Résoudre l'équation $\dfrac{x+1}{x^2-1}=0$

Résoudre l'équation sous la forme

$$\frac{P}{Q}=0 \quad \Leftrightarrow P=0$$

où $\quad Q\neq 0$

- $\dfrac{x+1}{x^2-1}$ est définie si $x^2-1\neq 0$

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-1 \qquad \Rightarrow \text{Domaine } \frac{x+1}{x^2-1} : \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Résoudre l'équation $\dfrac{x+1}{x^2-1}=0 \quad , \text{ où } x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

$$\frac{x+1}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \notin \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

$$S=\varnothing$$

Résolution d'équations à une variable contenant des fractions rationnelles

Exemple 6

Messi et sa coéquipière, Guiva, estiment qu'ils prendront 6h de temps pour finir leur rapport s'ils le réalisent à deux.
Comme Guiva travaille à temps partiel, Messi estime qu'il peut terminer le rapport en 5 heures de moins que Guiva s'il le fait tout seul.
Il se pose la question de savoir combien de temps ça lui prendrait de travailler seul sur le rapport d'équipe.
Si x représente le nombre d'heures que prendrait Messi pour faire la tâche seul
On cherche alors x qui vérifie l'équation :
la somme des proportions de la tâche réalisée par Messi seul et par Guiva seule par heure est égale à la proportion de la tâche réalisée ensemble par heure.

Résolution d’équations à une variable contenant des fractions rationnelles

Exemple 6

- Durée de la tâche à deux : 6 heures
- Durée de la tâche à Messi seul : 5 heures de moins que Guiva seule
- x : le nombre d’heures que prendrait Messi pour faire seul le rapport d’équipe

x

$\frac{1}{x}$ de la tâche par heure, $x > 0$

$\frac{1}{6}$ de la tâche par heure

$x + 5$

$\frac{1}{x+5}$ de la tâche par heure

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$$

Équation à une variable contenant des fractions rationnelles

Résolution d'équations à une variable contenant des fractions rationnelles

- x : le nombre d'heures que prendrait Messi pour faire seul le rapport d'équipe

Trouver x tel que $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1}{6}$

$x \neq 0$ $\quad$ $x+5 \neq 0$

Domaine (mathématique) de $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+5}$: $\mathbb{R} \setminus \{-5, 0\}$

Domaine (contextuel) de $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+5}$: $]0, +\infty[$

Résolution d'équations à une variable contenant des fractions rationnelles

- x : le nombre d'heures que prendrait Messi pour faire seul le rapport d'équipe

Trouver x tel que $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$

Domaine (contextuel) de $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}$: $]0,+\infty[$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1(x+5)}{x(x+5)}+\frac{x\times 1}{x(x+5)}=\frac{1}{6}$$

$$x(x+5)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x+5+x}{x(x+5)}=\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x+5}{x(x+5)}=\frac{1}{6}$$

Résolution d'équations à une variable contenant des fractions rationnelles

- x : le nombre d'heures que prendrait Messi pour faire seul le rapport d'équipe

Trouver x tel que $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1}{6}$

Domaine (contextuel) de $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+5}$: $]0,+\infty[$

Rappel

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd}=\frac{cb}{db} \Leftrightarrow ad=cb \text{ , où } b\neq 0,\ d\neq 0$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{2x+5}{x(x+5)}=\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow (2x+5)\times 6 = x(x+5)\times 1$$

$$\Leftrightarrow x^2-7x-30=0 \qquad \Delta=b^2-4ac=169>0$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-3 \notin]0,+\infty[\rightarrow \text{Rejetée}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=10 \in]0,+\infty[\rightarrow \text{Accéptée}$$

Résolution d’équations à une variable contenant des fractions rationnelles

- x : le nombre d’heures que prendrait Messi pour faire seul le rapport d’équipe

Trouver x tel que $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$

Domaine (contextuel) de $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}$: $]0,+\infty[$

$x=10$ heures est la solution de l'équation

Messi prendra $x=10$ heures pour effectuer seul le rapport d’équipe

Guiva prendra $x+5=10+5=15$ heures pour faire seul le travail d’équipe

Résolution d’équations à une variable contenant des fractions rationnelles

$$\frac{x-1}{2x+5}=2$$

$$\frac{2-x}{x^2-4}=\frac{1}{2-3x}$$

$$\frac{-3}{x^2-x-2}=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-2}$$

Équations à une variable contenant des fractions rationnelles

Résumé

Fraction rationnelle est une expression de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont des polynômes et $Q \neq 0$

La somme de fractions rationnelles → Ramener les deux fractions au même dénominateur

→ Domaine: l'intersection des domaines de toutes les fractions impliquées

Le produit de fractions rationnelles → Factoriser les numérateurs et les dénominateurs, puis simplifier, si possible

→ Multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, des fractions simplifiées.

→ Domaine: l'intersection des domaines de toutes les fractions qui y figurent

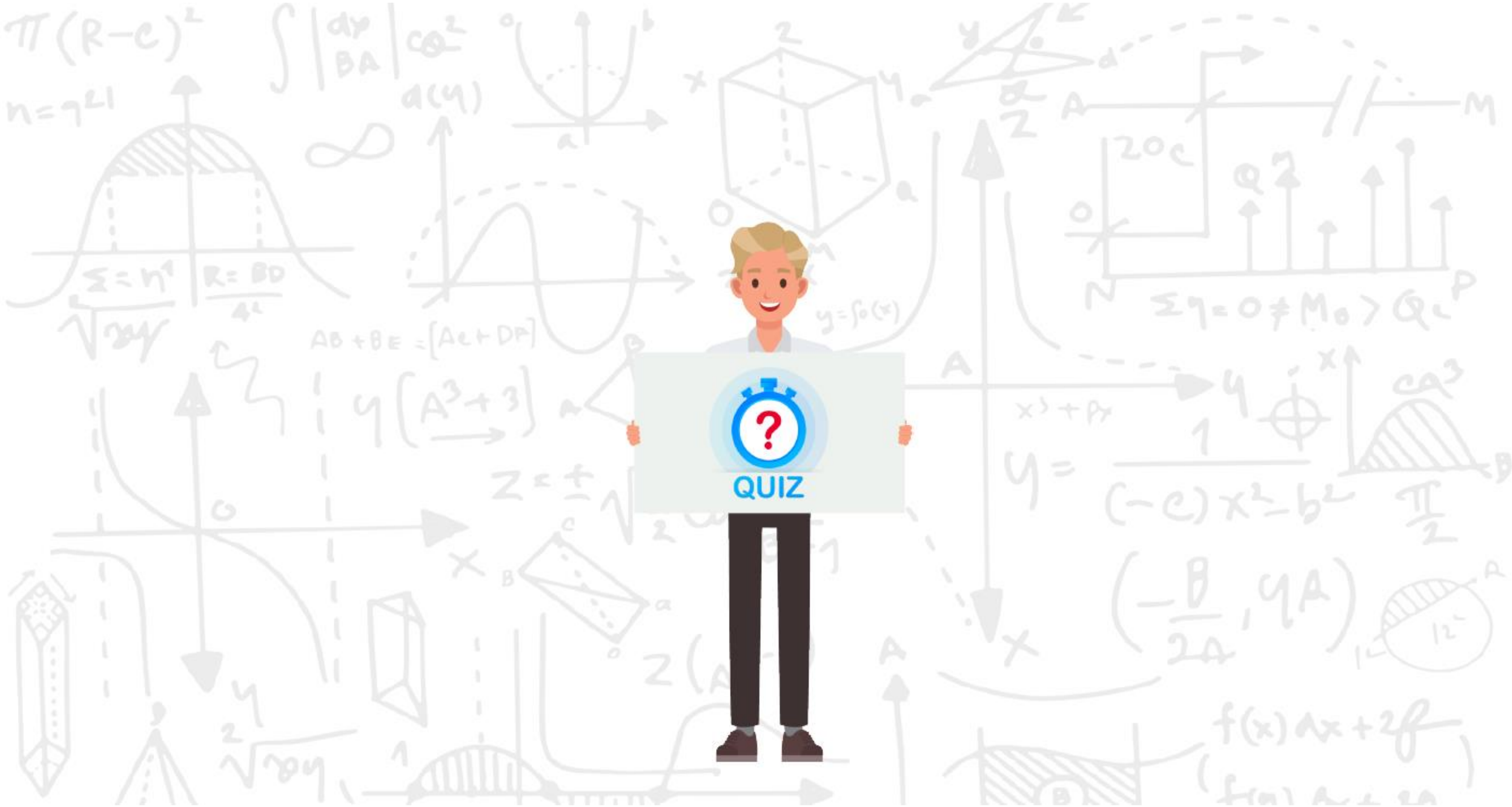
Le quotient de deux fractions rationnelles → Multiplier la fraction au numérateur par l'inverse de la fraction du dénominateur et appliquer les recommandations du produit de fractions

→ Domaine : l'intersection des domaines de toutes les fractions qui y figurent

Les solutions d'une équation doivent appartenir au domaine de l'équation

RÉFÉRENCES

- Michèle Gingras, **Mathématique d'appoint**, 5e édition, 2015, Éditeur Chenelière éducation.
- Josée Hamel, **Mise à niveau Mathématique**, 2e édition, 2017, Éditeur Pearson (ERPI)


QUIZ