HEC MONTRÉAL

DÉPARTEMENT DE SCIENCES DE LA DÉCISION
FATIHA KACHER - Maître d'enseignement
CENTRE D'AIDE EN MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE
MICHEL KEOULA - Coordonnateur

MATHÉMATIQUES D'APPOINT

LES FONCTIONS

LES FONCTIONS

- Définition d’une fonction
- Caractéristiques d’une fonction : domaine, ensemble image , zéros et ordonnée à l’origine
- Fonctions polynômiales : constante, affine, quadratique,…

Définition d'une fonction

Exemple 1

Au Québec :

TPS (taxes sur les produits et services)

TVQ (taxes de vente du Québec)

montant $\boldsymbol{x}$ \$ hors taxes

15% de ce prix $\boldsymbol{x}$

Prix avant taxes — Prix taxes incluses

$$x \mapsto x + 0{,}15x = (1 + 0{,}15)\,x = 1{,}15x$$

$$\begin{aligned} T : [0, +\infty[&\to [0, +\infty[\\ x &\mapsto T(x) = 1{,}15x \end{aligned}$$

Définition d’une fonction

Exemple 1

$$T : [0,+\infty[\quad \rightarrow \quad [0,+\infty[$$
$$x \quad \mapsto \quad T(x) = 1{,}15x$$

Un manteau d’hiver est affiché à **50 $**, quel montant allez-vous payer à la caisse ?

$$T(50) = 1{,}15 \times 50 = 57{,}5 \ \$$$

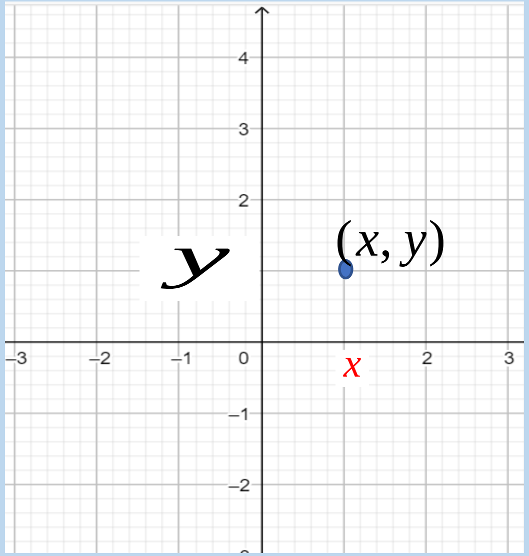
Définition d'une fonction

Une fonction réelle f est une règle de correspondance qui associe à chaque nombre réel x au plus un nombre réel y

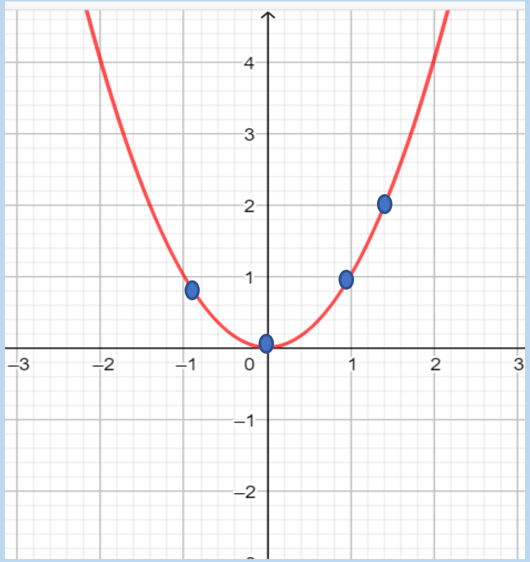
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

$$x : entrée \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow y = f(x) : sortie$$

x : variable indépendante et y : variable dépendante



Le graphe de f

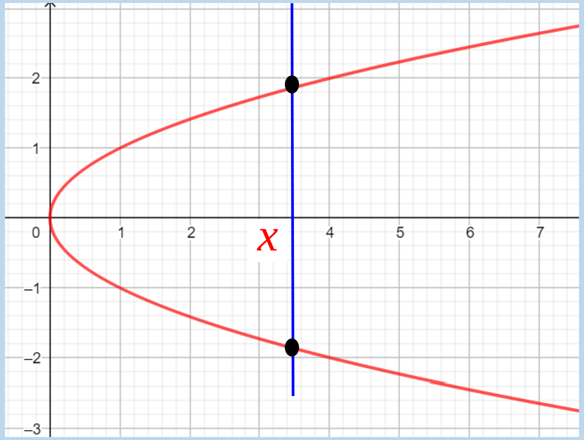


Définition d'une fonction

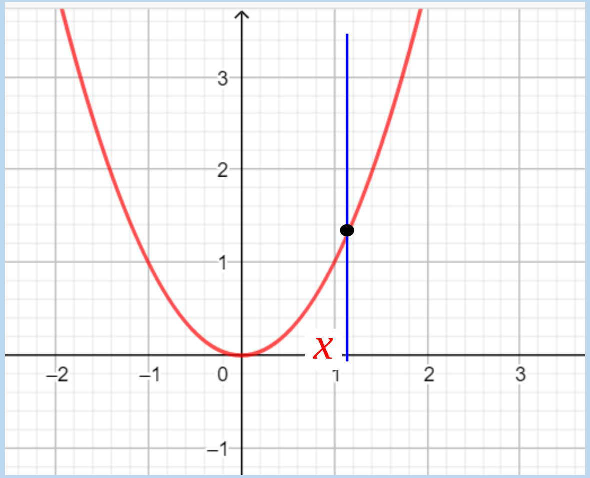
Une fonction réelle f est une règle de correspondance qui associe à chaque nombre réel x au plus un nombre réel y,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

x : variable indépendante et y : variable dépendante



N'est pas un graphe d'une fonction



Un graphe d'une fonction

Caractéristiques d’une fonction : domaine d’une fonction

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

$$\boxed{Dom(f) \subseteq \mathbb{R}}$$

Domaine de la fonction f, noté $Dom(f)$, est l'ensemble des nombres réels pour lesquels $f(x)$ est définie (existe).

Exemple 2

$T(x) = 1{,}15x$ ⇒ Domaine mathématique : $\mathbb{R}$

$T(x) = 1{,}15x$ ⇒ Domaine contextuel : $[0, +\infty[$

$f(x) = \sqrt{x}$ ⇒ $\text{Dom}(f) = [0, +\infty[$, car $\sqrt{x}$ est définie (existe) si et seulement si $x \geq 0$.

- $f(-4) = \sqrt{-4}$ n'existe pas
- $f(4) = \sqrt{4} = 2$ (existe)

$g(x) = \sqrt[3]{x}$ ⇒ $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$, car $\sqrt[3]{x}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $g(-8) = \sqrt[3]{-8} = -2$ existe
- $g(8) = \sqrt{8} = 2$ (existe)

$h(x) = \dfrac{1}{x}$ ⇒ $\text{Dom}(h) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, car la fraction $\dfrac{1}{x}$ est définie (existe) si et seulement si $x \neq 0$

Caractéristiques d'une fonction : image d'une fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

Image d'une fonction réelle f, notée $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des nombres réels y qui peuvent s'écrire comme

$$y = f(x), \text{ où } x \in Dom(f)$$

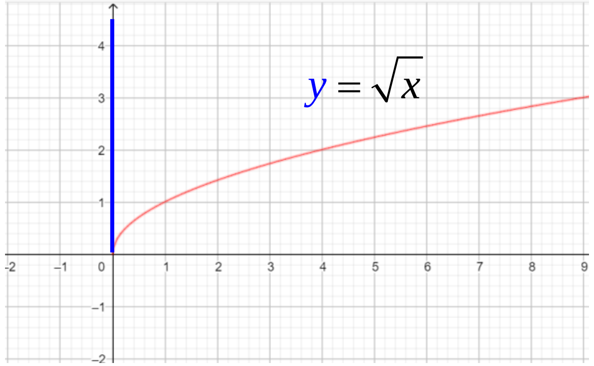
Exemple 3

$T(x) = 1{,}15x$

$\mathrm{Im}(T) = [0, +\infty[$

car $x > 0$ et $y = 1{,}15x > 0$

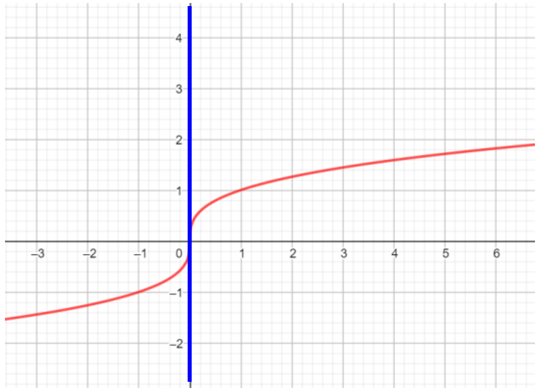
$f(x) = \sqrt{x}$



$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty[$

car $y = \sqrt{x} \geq 0$, pour tout $x \in [0, +\infty[$

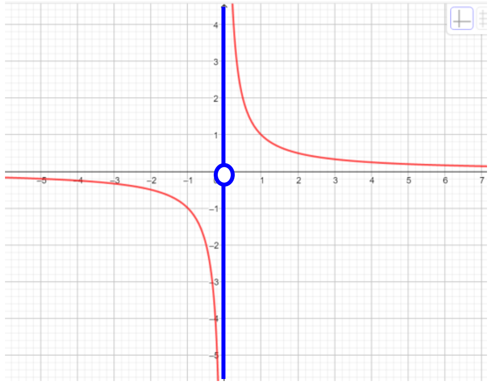
$g(x) = \sqrt[3]{x}$



$\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$

car $y = \sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$h(x) = \dfrac{1}{x}$

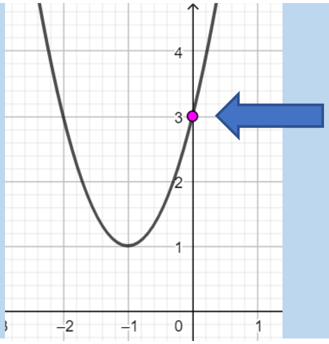


$\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Caractéristiques d'une fonction : image d'une fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

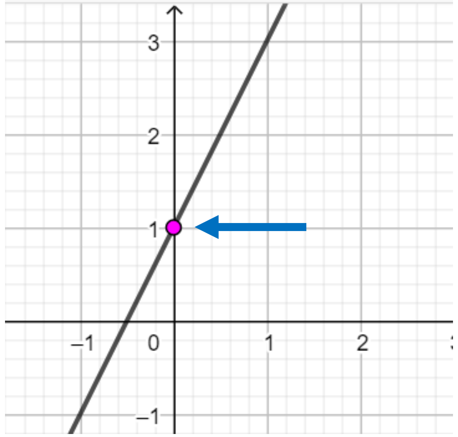
L'ordonnée à l'origine de f : l'ordonnée $y = f(0)$, si $0 \in Dom(f)$



Exemple 4 Trouvez l'ordonnée à l'origine

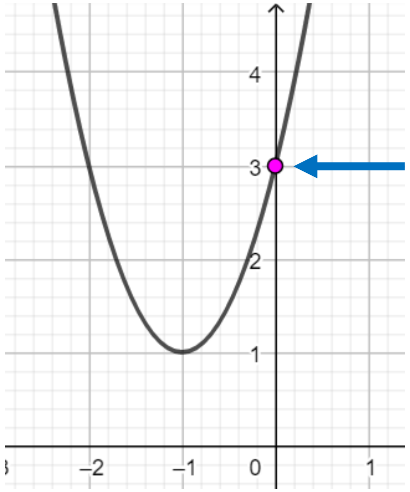
$f(x) = 2x + 1$

$f(0) = 2 \times 0 + 1 = 1$



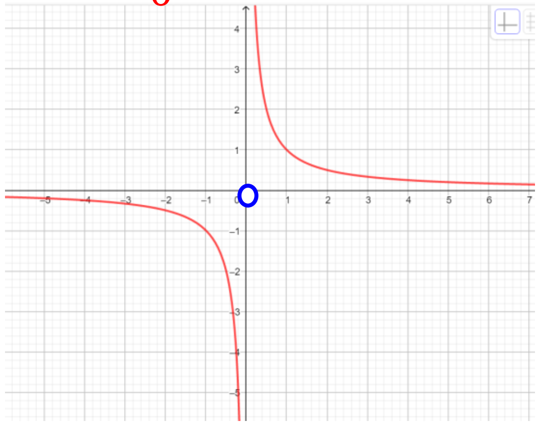
$g(x) = 2x^2 + 4x + 3$

$g(0) = 2 \times 0^2 + 4 \times 0 + 3 = 3$



$h(x) = \dfrac{1}{x}$

$h(0) = \dfrac{1}{0}$ n'est pas définie



Caractéristiques d’une fonction : zéros d’une fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

Zéros de la fonction f **:** valeurs de $x \in Dom(f)$ telles que $f(x) = 0$

Trouver les Zéros de f

Résoudre l’équation : $f(x) = 0, \quad x \in Dom(f)$

Graphiquement : abscisses des points d’intersection~~s~~ avec l’axe des x

Caractéristiques d'une fonction : zéros d'une fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

Zéros de la fonction f **:** valeurs de $x \in Dom(f)$ telles que $f(x) = 0$

Exemple 5 Trouvez les zéros de $T(x) = 1{,}15x$

$T(x) = 1{,}15x$

Domaine contextuel : $[0, +\infty[$

Zéros de T : $T(x) = 0 \Leftrightarrow 1{,}15x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

$0 \in Dom(f)$

À vérifier souvent

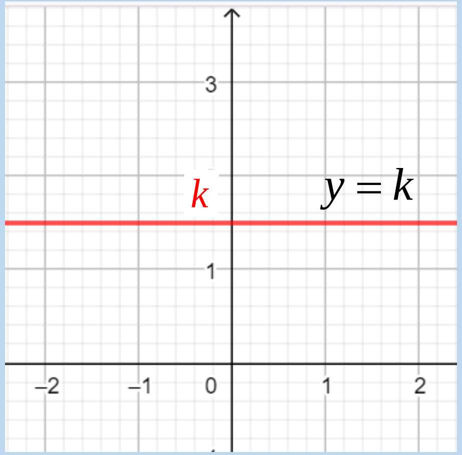
$\boxed{x = 0 \text{ est le zéro de la fonction}}$

Fonctions polynômiales

Fonction constante

- $f(x) = k$, où $k \in \mathbb{R}$: fonction constante, polynôme de degré 0 à une variable

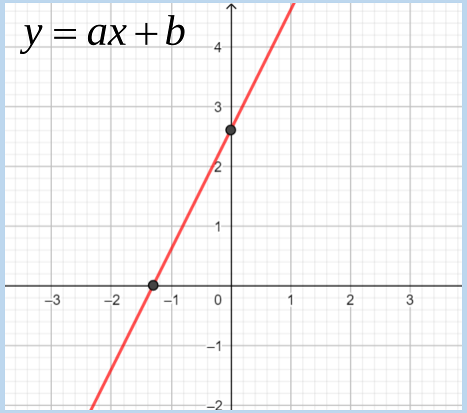
Graphe : droite horizontale



Fonction affine

- $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$: fonction affine, polynôme de degré 1 à une variable

Graphe : droite oblique



Fonctions polynômiales

Fonction affine

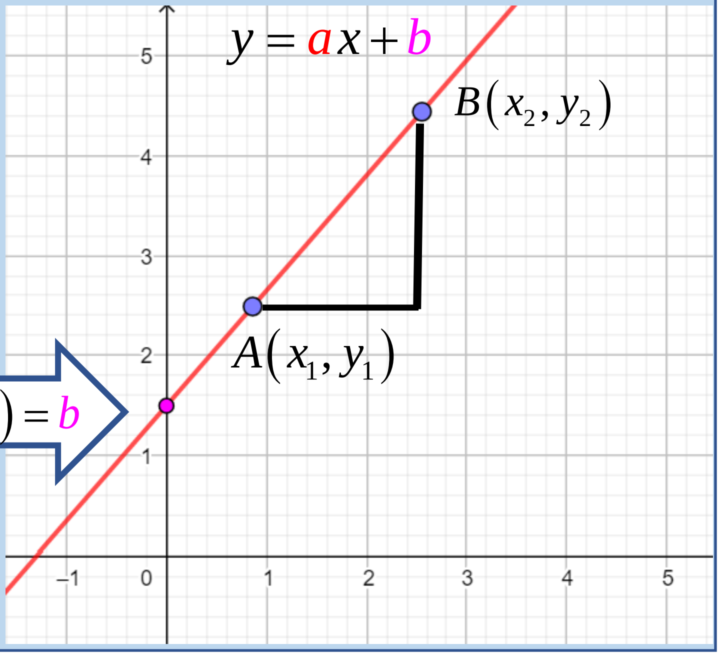
- $f\left(x\right)=ax+b,\ a\neq 0$: fonction affine

a : Pente
: coefficient directeur

: Taux de variation

$$=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

Ordonnée à l'origine $=f\left(0\right)=b$



Exemple 6

$T\left(x\right)=1{,}15x$: fonction affine

$a=1{,}15$

le prix après taxes augmente de 1,15 \$ quand le prix avant taxes augmente d'un dollar.

$T\left(x\right)=1{,}15x$: fonction affine

L'ordonnée à l'origine $b=0$

Si on n'achète rien, on paye 0 \$

Fonctions polynômiales

Comment trouver l’équation d’une droite passant par deux points

Exemple 6 Donnez l’équation de la droite passant par les points $A(-1,1)$ et $B(3,9)$

$$y = ax + b,\ a \neq 0$$

Étape 1

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$a = \frac{9-1}{3-(-1)}$$

$$a = 2$$

$$y = 2x + b$$

Étape 2

$$b = ?$$

$$y = 2x + b$$

$$1 = 2(-1) + b \Leftrightarrow 1 = -2 + b$$

$$b = 3$$

Étape 3

L’équation de la droite qui passe par les points A et B :

$$y = 2x + 3$$

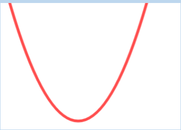
$x = -\dfrac{3}{2}$: le zéro de $f(x) = 2x + 3$

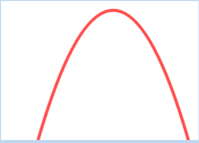
Fonctions polynômiales

Fonction quadratique

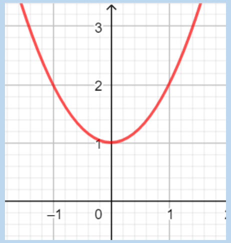
- $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$: polynôme de degré 2 à une variable

Graphe : parabole





Le sommet de la parabole : $x_S = -\dfrac{b}{2a}$ et $y_s = f(x_S)$

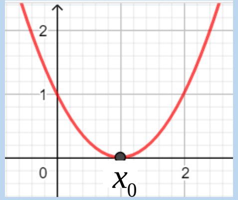


Les zéros de la parabole : $\Delta = b^2 - 4ac$

Résoudre $f(x) = 0$

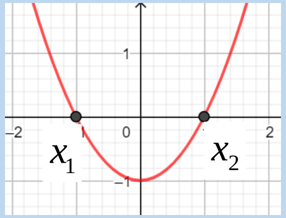
$\Delta < 0 \Rightarrow$ La parabole n'admet aucun zéro

$\Delta = 0 \Rightarrow$ La parabole admet un seul zéro : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

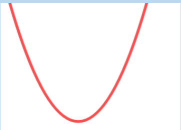
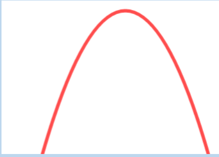


$\Delta > 0 \Rightarrow$ La parabole admet deux zéros :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$



Parabole ouverte vers le haut ou vers le bas?

- Si $a > 0 \Rightarrow$  et si $a < 0 \Rightarrow$ 

Fonction quadratique

Exemple 7 $f\left(x\right)=-x^2-2x+3$

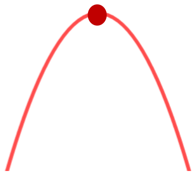
$a=-1$

$b=-2$

$c=3$

- Le sommet de la parabole : $x_S=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{-2}=-1$ et $y_s=f\left(x_S\right)=4$

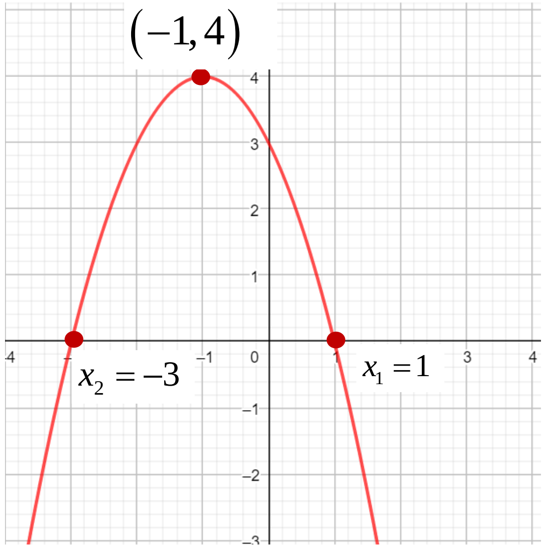
- $a=-1<0$



- $\Delta=16>0$, l'équation $-x^2-2x+3=0$ admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=1 \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=-3$$

La parabole coupe l'axe des x aux points : $(-3,0)$ et $(1,0)$



Fonctions polynômiales

- $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o\,,\quad a_n \neq 0$: polynôme de degré n à une variable

$Dom(f) = \mathbb{R}$

Zéros de f : résoudre $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o = 0$

L'ordonnée à l'origine : $y = f(0)$

$f(x) = -2$ → degré 0

$f(x) = 3x - 1,$ → degré 1

$f(x) = -x^2 + 2x - 3$ → degré 2

$f(x) = 2x^{10} - x^5 - x + 1$ → degré 10 …

Résumé

Fonction polynômiale : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_o\,,\quad a_n \neq 0$

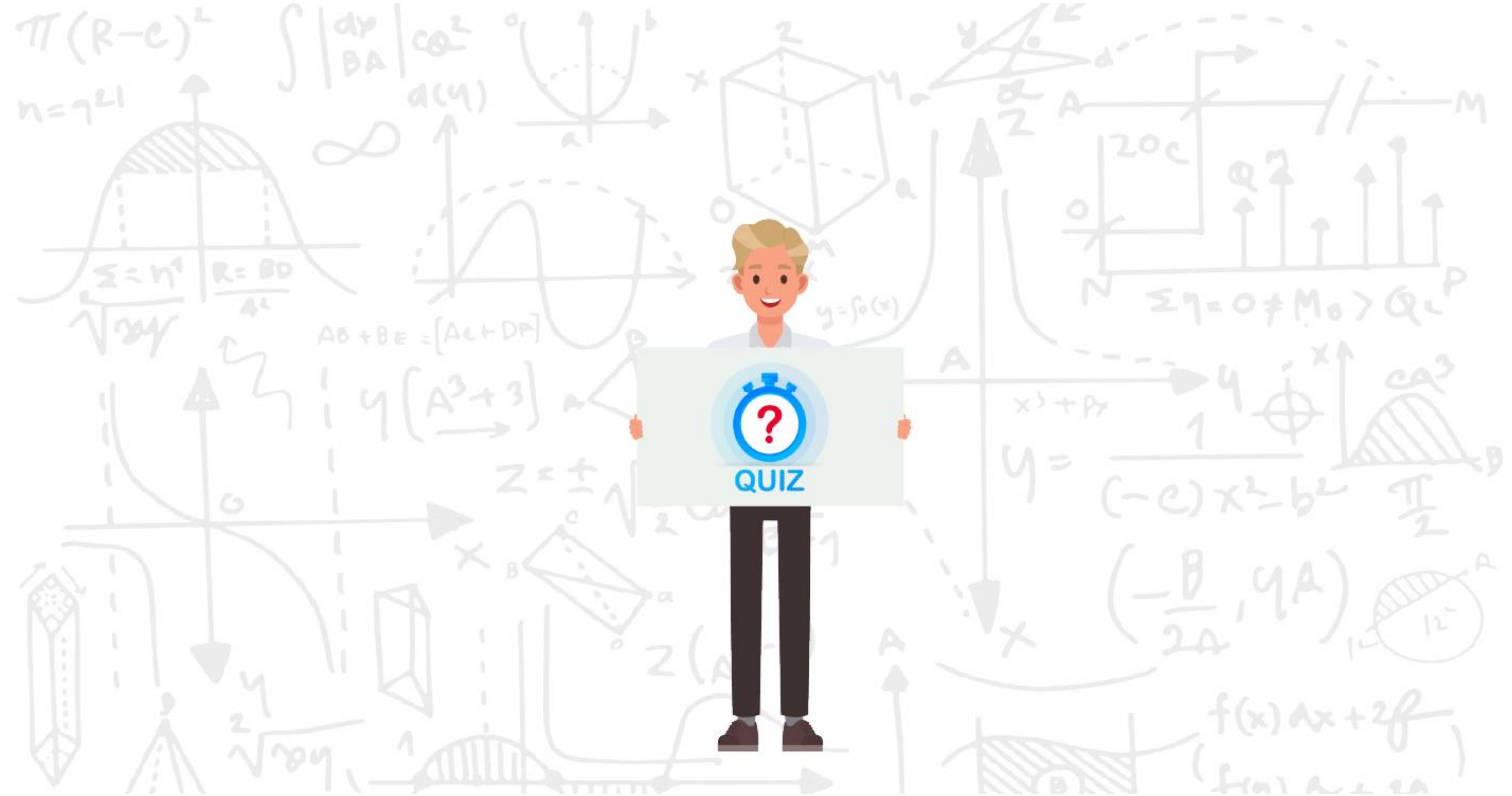
$Dom(f) = \mathbb{R}$

Zéros : Résoudre $f(x) = 0$

- $f(x) = k,\ \ k \in \mathbb{R}$: Fonction constante → Graphe → Droite horizontale
- $f(x) = ax + b,\ a \neq 0$: Fonction affine → Graphe → Droite oblique
- $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$: Fonction quadratique → Graphe → Parabole

RÉFÉRENCES

- Michèle Gingras, **Mathématique d'appoint**, 5e édition, 2015, Éditeur Chenelière éducation.
- Josée Hamel, **Mise à niveau Mathématique**, 2e édition, 2017, Éditeur Pearson (ERPI)


QUIZ