

FONCTIONS RATIONNELLES ET ALGÈBRIQUES



FONCTIONS RATIONNELLES ET ALGÈBRIQUES

- Fonctions rationnelles
- Fonctions algébriques

Fonctions rationnelles

Fonction rationnelle : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions polynomiales.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\}$$

Zéros : Résoudre l'équation $P(x) = 0$, où $x \in \text{Dom}(f)$

Rappel La fraction $\frac{P}{Q}$ est définie si $Q \neq 0$

Rappel La fraction $\frac{P}{Q} = 0$ si et seulement si $P = 0$

Fonctions rationnelles

Exemple 1 Trouvez le domaine et les zéros de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$



$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

La fraction $\frac{P}{Q}$ est définie si $Q \neq 0$



$$\text{Zéros de } f : \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$$

La fraction $\frac{P}{Q} = 0$ si et seulement si $P = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0$$



$$x = 1 \notin \text{Dom}(f)$$



$$x = -1 \in \text{Dom}(f)$$

À vérifier souvent

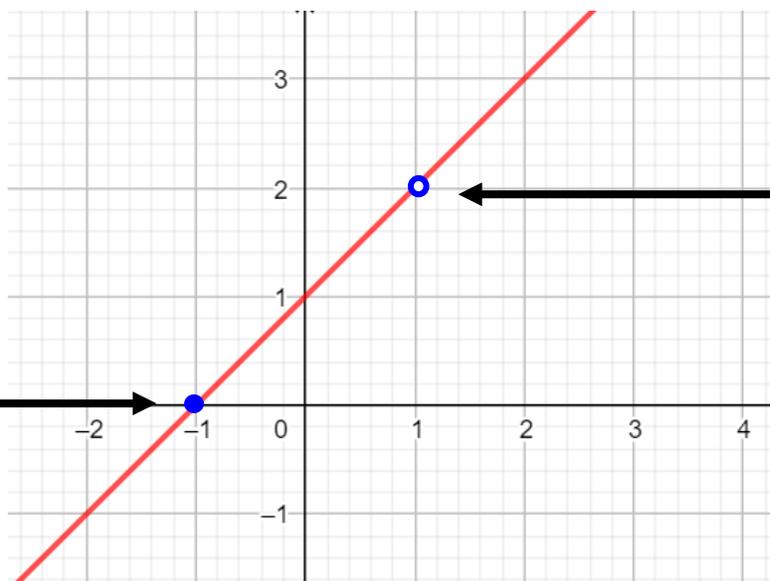
$x = -1$ est le seul zéro de la fonction

$x = 1$ n'est pas un zéro de la fonction

Fonctions rationnelles

Exemple 1 Trouvez le domaine et les zéros de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x = -1$ est le seul zéro de la fonction



$x = 1$ n'est pas un zéro de la fonction

Le graphe de f coupe l'axe des abscisses au point $(-1, 0)$

Le graphe de f ne passe pas par le point d'abscisse $x = 1$
 $(1, 2)$: un **point vide** ou un **trou**

Fonctions rationnelles

Exemple 2 Trouvez le domaine et les zéros de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$



$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

car $x^2 = -1$: impossible



$$\text{Zéros de } f : \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1 \in \text{Dom}(f)$$

La fraction $\frac{P}{Q}$ est définie si $Q \neq 0$

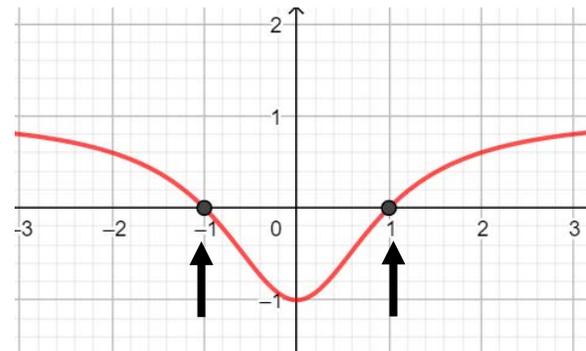
La fraction $\frac{P}{Q} = 0$ si et seulement si $P = 0$

À vérifier souvent

$x = \pm 1$ sont les deux zéros de la fonction



Le graphe de f coupe l'axe des x en $(-1, 0)$ et $(1, 0)$



Fonctions algébriques

$$f(x) = \sqrt{1-2x} \quad g(x) = \sqrt[4]{x^2-1} \quad h(x) = \sqrt[3]{x^2-1} \quad k(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} \dots$$

Exemples de fonctions algébriques

Modèle 1 : Polynôme

- **Domaine** : \mathbb{R} (si pas de contexte)
- **Zéros** : Résoudre $f(x) = 0$

Modèle 2 : Fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$

- **Domaine** : $Q \neq 0$
- **Zéros** : $\frac{P}{Q} = 0 \Leftrightarrow P = 0$

Modèle 3 : Racine carrée (racine n -ème avec n pair) \sqrt{P} , $\sqrt[4]{P}$, $\sqrt[6]{P}$, ...

- **Domaine** : $P \geq 0$
- **Zéros** : $\sqrt[n]{P} = 0 \Leftrightarrow P = 0$

Modèle 4 : Racine cubique (racine n -ème avec n impair) : $\sqrt[3]{P}$, $\sqrt[5]{P}$, $\sqrt[7]{P}$, ...

- **Domaine** : \mathbb{R}
- **Zéros** : $\sqrt[n]{P} = 0 \Leftrightarrow P = 0$

Fonctions algébriques

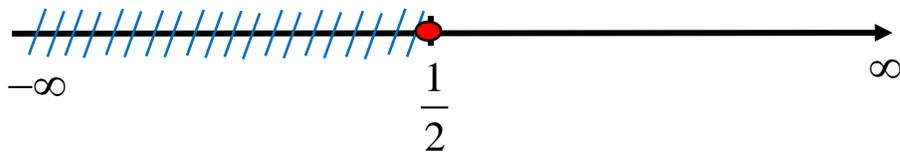
Exemple 1 Trouvez le domaine et les zéros de $f(x) = \sqrt{1-2x}$

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1-2x \geq 0\}$$

Résoudre : $1-2x \geq 0$

$$1-2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$



Modèle 3 : Racine carrée \sqrt{P}

- **Domaine** : $P \geq 0$
- **Zéros** : $\sqrt{P} = 0 \Leftrightarrow P = 0$

$$\text{Dom}(f) = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$$

Fonctions algébriques

Exemple 1 Trouvez le domaine et les zéros de $f(x) = \sqrt{1-2x}$

$$\text{Dom}(f) = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$$

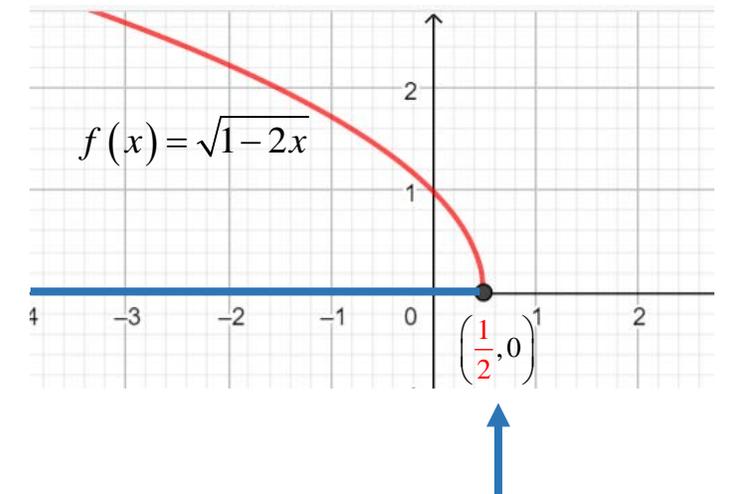
Zéros de f : Résoudre $\sqrt{1-2x} = 0 \Leftrightarrow 1-2x = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in \text{Dom}(f)$$

$x = \frac{1}{2}$ est le seul zéro de la fonction

Modèle 3 : Racine carrée \sqrt{P}

- **Domaine** : $P \geq 0$
- **Zéros** : $\sqrt{P} = 0 \Leftrightarrow P = 0$



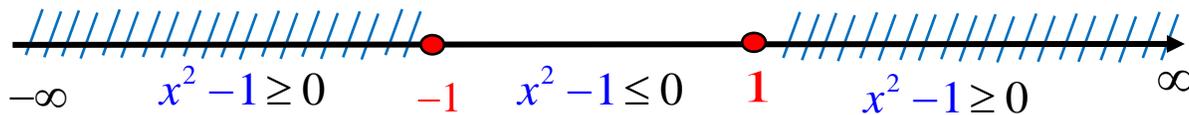
Fonctions algébriques

Exemple 2 Trouvez le domaine et les zéros de $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 1}$

$$\text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0\}$$

Résoudre : $x^2 - 1 \geq 0 \longrightarrow a = 1 > 0$

$$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \geq 0$$

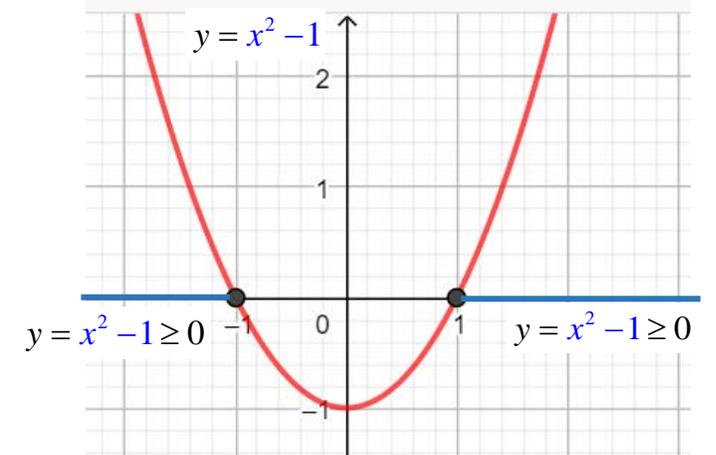


$$\text{Dom}(g) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

Modèle 3 : Racine 4^{ème} $\sqrt[4]{P}$

- **Domaine** : $P \geq 0$
- **Zéros** : $\sqrt[4]{P} = 0 \Leftrightarrow P = 0$

Capsule _Inéquations quadratiques



Fonctions algébriques

Exemple 2 Trouvez le domaine et les zéros de $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 1}$

$$\text{Dom}(g) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

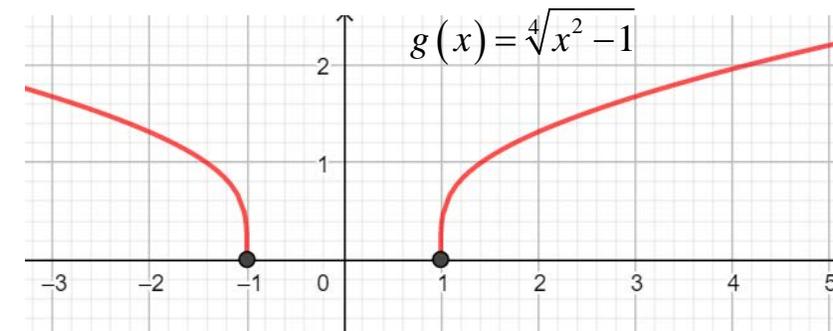
Zéros de g : Résoudre $\sqrt[4]{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1 \in \text{Dom}(g)$$

$x = \pm 1$ sont les zéros de la fonction.

Modèle 3 : Racine 4^{ème} $\sqrt[4]{P}$

- **Domaine** : $P \geq 0$
- **Zéros** : $\sqrt[4]{P} = 0 \Leftrightarrow P = 0$



Fonctions algébriques

Exemple 3 Trouvez le domaine et les zéros de $h(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

$$\text{Dom}(h) = \mathbb{R}$$

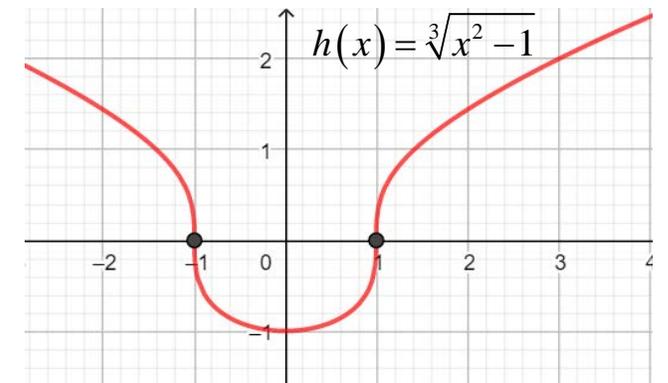
Zéros de h : Résoudre $\sqrt[3]{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1 \in \text{Dom}(h)$$

$x = \pm 1$ sont les zéros de la fonction.

Modèle 4 : Racine cubique $\sqrt[3]{P}$

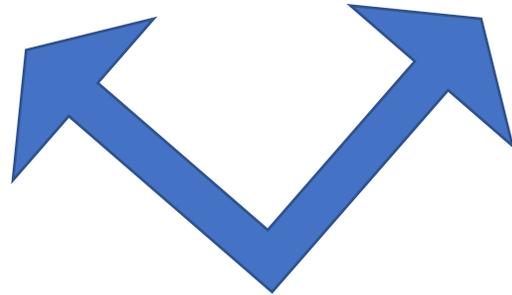
- **Domaine** : \mathbb{R}
- **Zéros** : $\sqrt[3]{P} = 0 \Leftrightarrow P = 0$



Fonctions algébriques

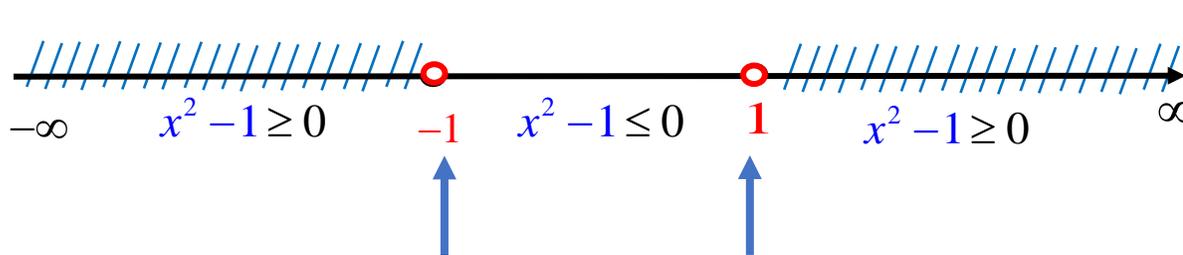
Exercice 4 Trouver le domaine et les zéros de $k(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\text{Dom}(k) : \sqrt{x^2-1} \neq 0 \Leftrightarrow x^2-1 \neq 0 \quad \text{et} \quad x^2-1 \geq 0$$



$$x^2 - 1 > 0$$

Voir exemple 8



$$\text{Dom}(h) =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

Modèle 2 : Fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$

- **Domaine** : $Q \neq 0$
- **Zéros** : $\frac{P}{Q} = 0 \Leftrightarrow P = 0$

Modèle 3 : Racine carrée \sqrt{P}

- **Domaine** : $P \geq 0$
- **Zéros** : $\sqrt{P} = 0 \Leftrightarrow P = 0$

Fonctions algébriques

Exercice 4 Trouver le domaine et les zéros de $k(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\text{Dom}(k) =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

Zéros de k : Résoudre $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \notin \text{Dom}(k)$

$x = -1$ n'est pas un zéro de la fonction.



Le graphe de f ~~coupe~~ ne coupe pas l'axe des x en $(-1, 0)$

Modèle 2 : Fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$

- **Domaine** : $Q \neq 0$

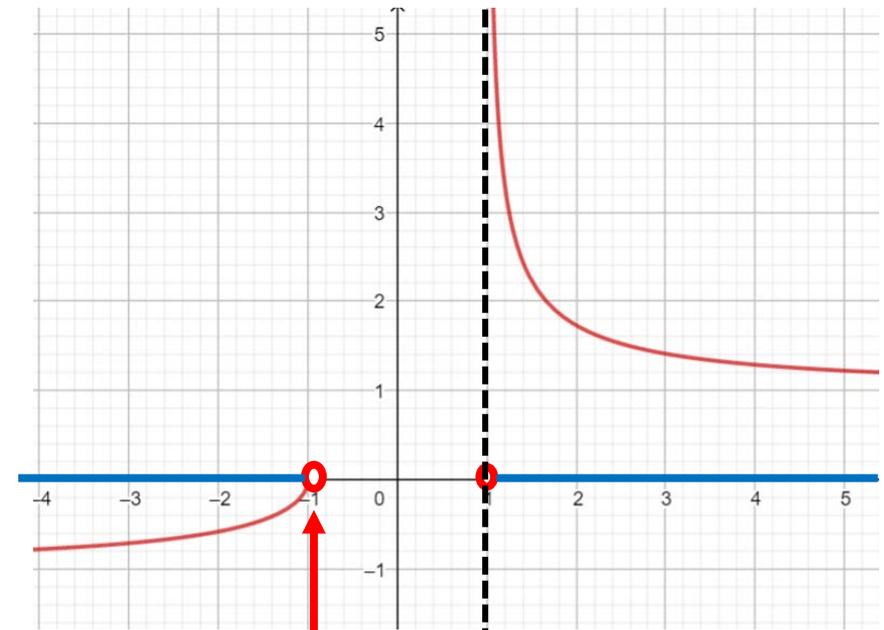
- **Zéros** : $\frac{P}{Q} = 0 \Leftrightarrow P = 0$

Fonctions algébriques

Exercice 4 Trouver le domaine et les zéros de $k(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\text{Dom}(k) =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

Zéros de k : $x = -1$ n'est pas un zéro de la fonction.



Un point vide ou bien un trou

$x = 1$: asymptote verticale

Résumé

Modèle 1 : Fonction polynômiale : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$

- **Domaine :** \mathbb{R}
- **Zéros :** Résoudre $f(x) = 0$

Modèle 2 : Fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$

- **Domaine :** $Q \neq 0$
- **Zéros :** $\frac{P}{Q} = 0 \Leftrightarrow P = 0$

Modèle 3 : Racine carrée (racine n -ème avec n pair) $\sqrt{P}, \sqrt[4]{P}, \sqrt[6]{P}, \dots$

- **Domaine :** $\sqrt{P}, \sqrt[4]{P}, \sqrt[6]{P}, \dots$
- **Zéros :** $\sqrt[n]{P} = 0 \Leftrightarrow P = 0$

Modèle 4 : Racine carrée (racine n -ème avec n pair) $\sqrt{P}, \sqrt[4]{P}, \sqrt[6]{P}, \dots$

- **Domaine :** $\sqrt{P}, \sqrt[4]{P}, \sqrt[6]{P}, \dots$
- **Zéros :** $\sqrt[n]{P} = 0 \Leftrightarrow P = 0$

Références

- Michèle Gingras, Mathématique d'appoint, 5^e édition, 2015, Éditeur Chenelière éducation
- Josée Hamel, Mise à niveau Mathématique, 2^e édition, 2017, Éditeur Pearson (ERPI)