HEC MONTRÉAL

DÉPARTEMENT DE SCIENCES DE LA DÉCISION
FATIHA KACHER – Maître d'enseignement
CENTRE D'AIDE EN MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE
MICHEL KEOULA – Coordonnateur

MATHÉMATIQUES D'APPOINT

FONCTIONS RATIONNELLES ET ALGÉBRIQUES

FONCTIONS RATIONNELLES ET ALGÉBRIQUES

- Fonctions rationnelles
- Fonctions algébriques

Fonctions rationnelles

Fonction rationnelle : $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions polynomiales.

Rappel La fraction $\dfrac{P}{Q}$ est définie si $Q \neq 0$

$$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\}$$

Zéros : Résoudre l'équation $P(x) = 0$, où $x \in Dom(f)$

Rappel La fraction $\dfrac{P}{Q} = 0$ si et seulement si $P = 0$

Fonctions rationnelles

Exemple 1 Trouvez le domaine et les zéros de $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

$\mathrm{Dom}(f) = \{x\in\mathbb{R} \mid x-1\neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

La fraction $\dfrac{P}{Q}$ est définie si $Q\neq 0$

Zéros de f : $\dfrac{x^2-1}{x-1}=0 \iff x^2-1=0$

La fraction $\dfrac{P}{Q}=0$ si et seulement si $P=0$

$\iff (x-1)(x+1)=0$

$x=1 \notin Dom(f)$

$x=-1 \in Dom(f)$

À vérifier souvent

$x=-1$ est le seul zéro de la fonction

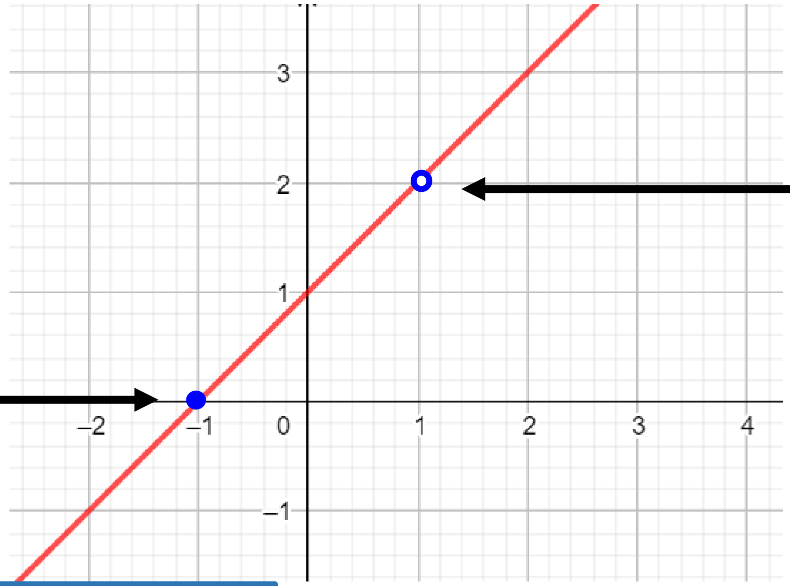
$x=1$ n'est pas un zéro de la fonction

Fonctions rationnelles

Exemple 1 Trouvez le domaine et les zéros de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ $\qquad Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x = -1$ est le seule zéro de la fonction

$x = 1$ n'est pas un zéro de la fonction



Le graphe de f coupe l'axe des abscisses au point $(-1, 0)$

Le graphe de f ne passe pas par le point d'abscisse $x = 1$
$(1, 2)$: un **point vide** ou un **trou**

Fonctions rationnelles

Exemple 2 Trouvez le domaine et les zéros de $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$\mathrm{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+1\neq 0\}=\mathbb{R}$$

car $x^2=-1$: impossible

La fraction $\dfrac{P}{Q}$ est définie si $Q\neq 0$

$$\text{Zéros de } f : \frac{x^2-1}{x^2+1}=0 \iff x^2-1=0$$

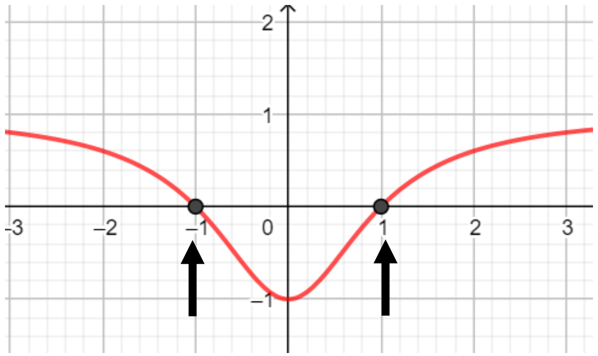
La fraction $\dfrac{P}{Q}=0$ si et seulement si $P=0$

$$\iff x=\pm 1 \in Dom(f)$$

À vérifier souvent

$x=\pm 1$ sont les deux zéros de la fonction

Le graphe de f coupe l'axe des x en $(-1,0)$ et $(1,0)$



Fonctions algébriques

$f(x)=\sqrt{1-2x}$ $g(x)=\sqrt[4]{x^2-1}$ $h(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ $k(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ ...

Exemples de fonctions algébriques

Modèle 1 : Polynôme

- **Domaine :** $\mathbb{R}$ (si pas de contexte)
- **Zéros :** Résoudre $f(x)=0$

Modèle 2 : Fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$

- **Domaine :** $Q \neq 0$
- **Zéros :** $\dfrac{P}{Q}=0 \Leftrightarrow P=0$

Modèle 3 : Racine carrée (racine n-ème avec n pair) $\sqrt{P}$, $\sqrt[4]{P}$, $\sqrt[6]{P}$,...

- **Domaine :** $P \geq 0$
- **Zéros :** $\sqrt[n]{P}=0 \Leftrightarrow P=0$

Modèle 4 : Racine cubique (racine n-ème avec n impair) : $\sqrt[3]{P}$, $\sqrt[5]{P}$, $\sqrt[7]{P}$,...

- **Domaine :** $\mathbb{R}$
- **Zéros :** $\sqrt[n]{P}=0 \Leftrightarrow P=0$

Fonctions algébriques

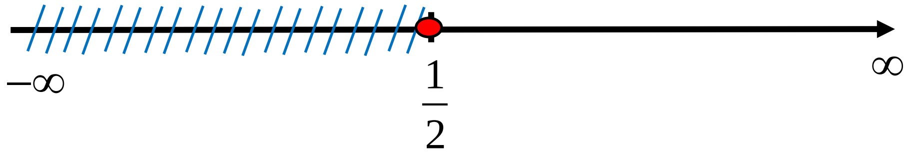
Exemple 1 Trouvez le domaine et les zéros de $f(x)=\sqrt{1-2x}$

$$\mathrm{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R} \mid 1-2x\geq 0\}$$

Résoudre : $1-2x\geq 0$

$$1-2x\geq 0 \Leftrightarrow -2x\geq -1$$

$$\Leftrightarrow x\leq \frac{1}{2}$$



Modèle 3 : Racine carrée $\sqrt{P}$

- **Domaine :** $P\geq 0$
- **Zéros :** $\sqrt{P}=0 \Leftrightarrow P=0$

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f)=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]}$$

Fonctions algébriques

Exemple 1 Trouvez le domaine et les ~~s~~ zéros de $f\left(x\right)=\sqrt{1-2x}$

$$\boxed{\mathrm{Dom}\left(f\right)=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]}$$

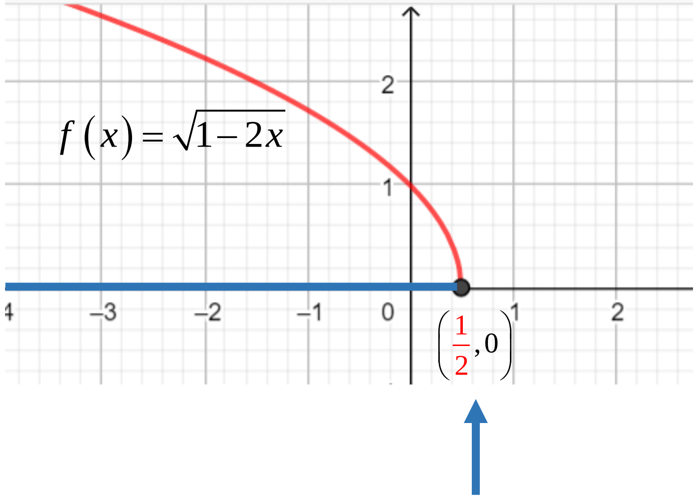
Modèle 3 : Racine carrée $\sqrt{P}$

- **Domaine :** $P \geq 0$
- **Zéros :** $\sqrt{P}=0 \Leftrightarrow P=0$

Zéros de f : Résoudre $\sqrt{1-2x}=0 \Leftrightarrow 1-2x=0$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \in Dom\left(f\right)$$

$$\boxed{x=\frac{1}{2} \text{ est le seul zéro de la fonction}}$$



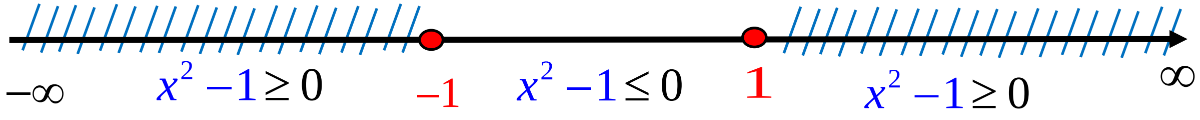
Fonctions <u>algébriques</u>

Exemple 2 Trouvez le domaine et les zéros de $g(x)=\sqrt[4]{x^2-1}$

$$\mathrm{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-1 \geq 0\}$$

Résoudre : $x^2-1 \geq 0 \longrightarrow a=1>0$

$$x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\geq 0$$

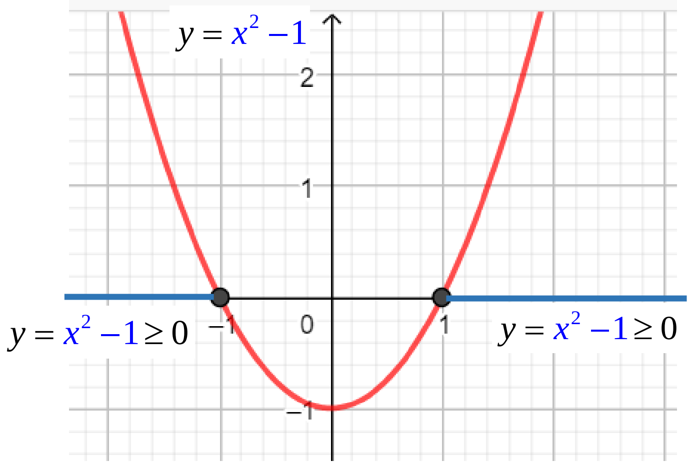


$$\boxed{\mathrm{Dom}(g) =]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[}$$

<u>Modèle 3</u> : Racine 4ème $\sqrt[4]{P}$

- **Domaine :** $P \geq 0$
- **Zéros :** $\sqrt[4]{P}=0 \Leftrightarrow P=0$

Capsule _Inéquations quadratiques



Fonctions algébriques

Exemple 2 Trouvez le domaine et les zéros de $g(x)=\sqrt[4]{x^2-1}$

Modèle 3 : Racine 4ème $\sqrt[4]{P}$

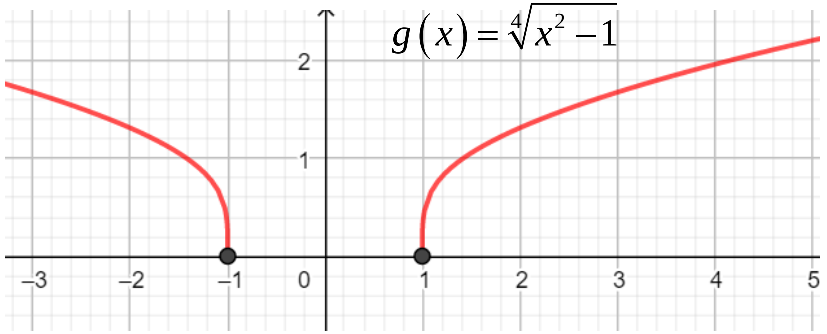
- **Domaine :** $P \geq 0$
- **Zéros :** $\sqrt[4]{P}=0 \Leftrightarrow P=0$

$$\boxed{\mathrm{Dom}(g)=\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[}$$

Zéros de g : Résoudre $\sqrt[4]{x^2-1}=0 \Leftrightarrow x^2-1=0$

$$\Leftrightarrow x=\pm 1 \quad \in Dom(g)$$

$$\boxed{x=\pm 1 \text{ sont les zéros de la fonction.}}$$



Fonctions algébriques

Exemple 3 Trouvez le domaine et les zéros de $h(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

$$\boxed{\mathrm{Dom}(h)=\mathbb{R}}$$

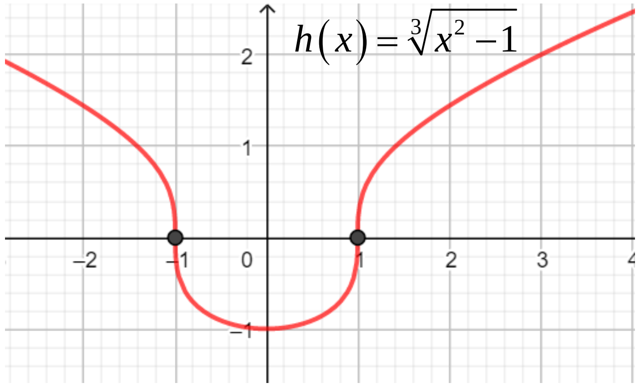
Modèle 4 : Racine cubique $\sqrt[3]{P}$

- **Domaine :** $\mathbb{R}$
- **Zéros :** $\sqrt[3]{P}=0 \Leftrightarrow P=0$

Zéros de h : Résoudre $\sqrt[3]{x^2-1}=0 \Leftrightarrow x^2-1=0$

$$\Leftrightarrow x=\pm 1 \in Dom(h)$$

$$\boxed{x=\pm 1 \text{ sont les zéros de la fonction.}}$$



Fonctions algébriques

Exercice 4 Trouver le domaine et les zéros de $k(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\text{Dom}(k) \quad : \sqrt{x^2-1} \neq 0 \iff x^2-1 \neq 0 \quad \text{et} \quad x^2-1 \geq 0$$

$$x^2-1>0$$

Voir exemple 8

$-\infty$ $\quad x^2-1 \geq 0 \quad$ -1 $\quad x^2-1 \leq 0 \quad$ 1 $\quad x^2-1 \geq 0 \quad$ ∞

$$\boxed{\text{Dom}(h) = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[}$$

Modèle 2 : Fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$

- $\boxed{\textbf{Domaine :} \quad Q \neq 0}$
- **Zéros :** $\dfrac{P}{Q}=0 \iff P=0$

Modèle 3 : Racine carrée $\sqrt{P}$

- $\boxed{\textbf{Domaine :} \quad P \geq 0}$
- **Zéros :** $\sqrt{P}=0 \iff P=0$

Fonctions algébriques

Exercice 4 Trouver le domaine et les zéros de $k(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

Modèle 2 : Fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$

- **Domaine :** $Q \neq 0$
- $\boxed{\textbf{Zéros : } \dfrac{P}{Q}=0 \Leftrightarrow P=0}$

$$\boxed{\mathrm{Dom}(k)=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[}$$

Zéros de k : Résoudre $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \notin Dom(k)$

$\boxed{x=-1 \text{ n'est pas un zéro de la fonction.}}$

$\Downarrow$

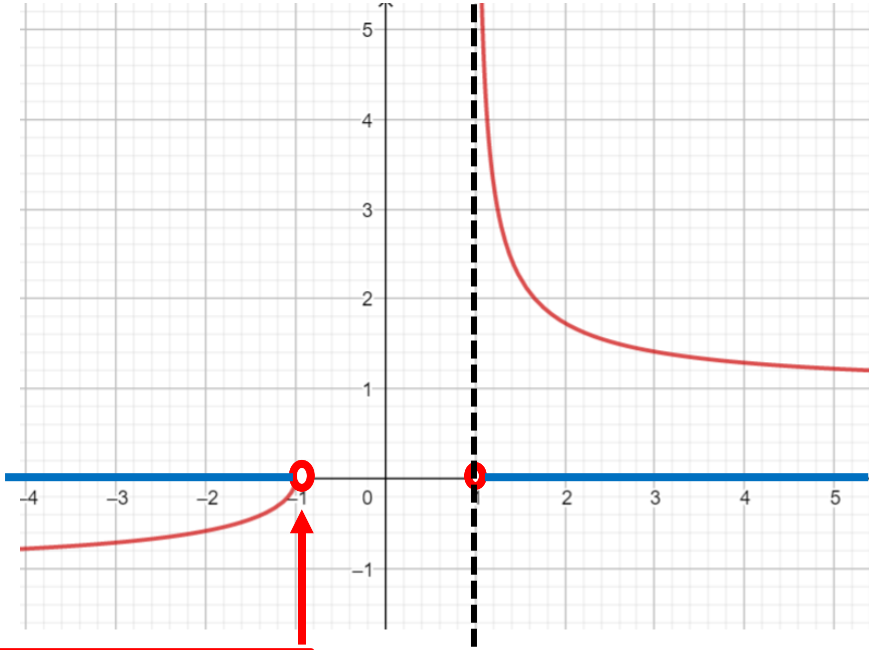
$\boxed{\text{Le graphe de } f \text{ ~~coupe~~ ne coupe pas l'axe des } x \text{ en } (-1,0)}$

Fonctions algébriques

Exercice 4 Trouver le domaine et les zéros de $k(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\boxed{\mathrm{Dom}(k) =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[}$$

$$\boxed{\text{Zéros de } k : \; x = -1 \text{ n'est pas un zéro de la fonction.}}$$



Un point vide ou bien un trou

$x = 1$: asymptote verticale

Résumé

Modèle 1 :Fonction polynômiale : $f\left(x\right)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1 x + a_o\,,\quad a_n \neq 0$

- **Domaine :** $\mathbb{R}$
- **Zéros :** Résoudre $f\left(x\right)=0$

Modèle 2 : Fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$

- **Domaine :** $Q \neq 0$
- **Zéros :** $\frac{P}{Q}=0 \Leftrightarrow P=0$

Modèle 3 : Racine carrée (racine n-ème avec n pair) $\sqrt{P},\quad \sqrt[4]{P},\quad \sqrt[6]{P},\ldots$

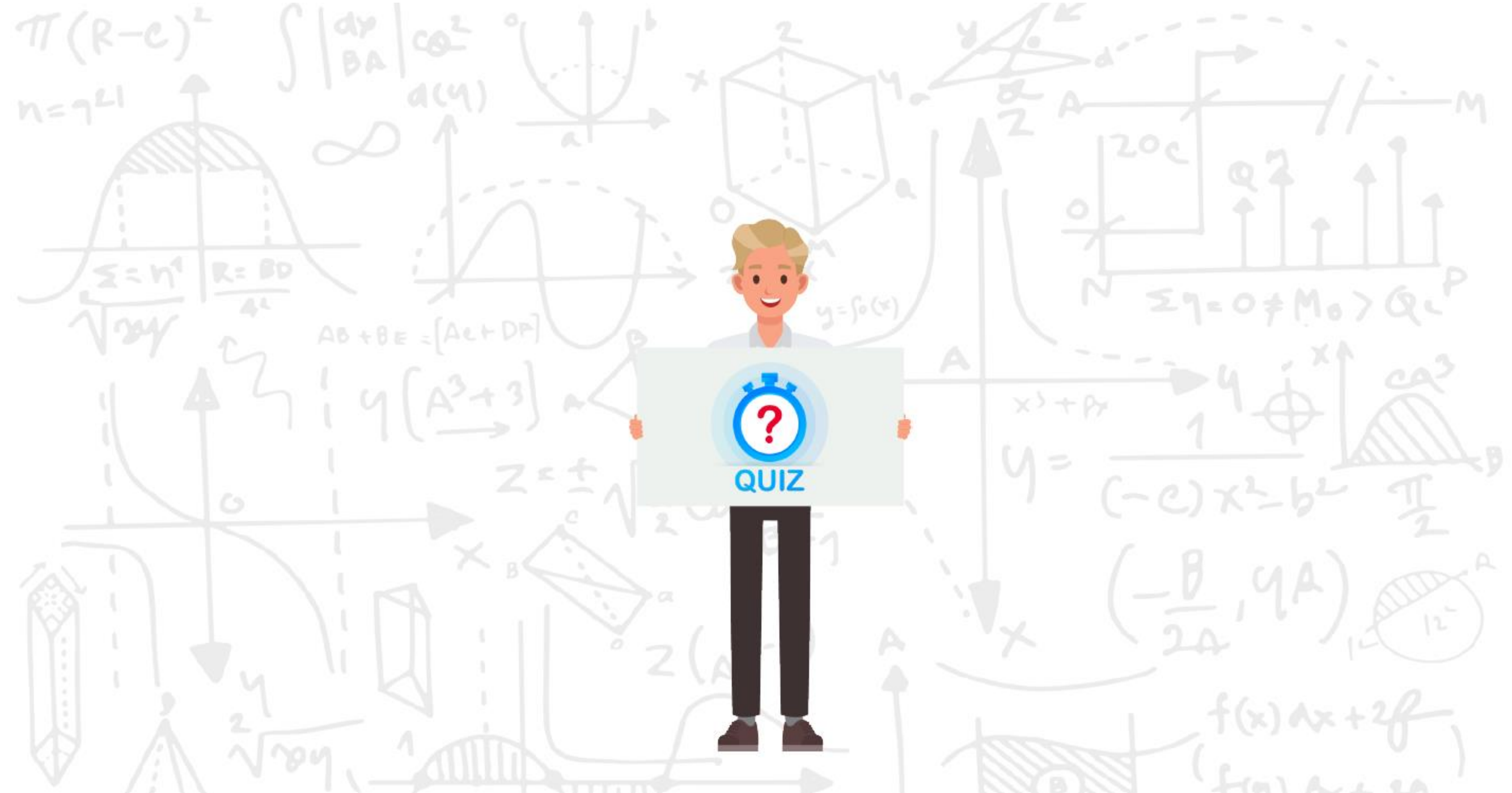
- **Domaine :** $P \geq 0$
- **Zéros :** $\sqrt[n]{P}=0 \Leftrightarrow P=0$

Modèle 4 : Racine cubique (racine n-ème avec n impair) $\sqrt[3]{P},\quad \sqrt[5]{P},\ldots$

- **Domaine :** $\mathbb{R}$
- **Zéros :** $\sqrt[n]{P}=0 \Leftrightarrow P=0$

RÉFÉRENCES

- Michèle Gingras, **Mathématique d'appoint**, 5e édition, 2015, Éditeur Chenelière éducation.
- Josée Hamel, **Mise à niveau Mathématique**, 2e édition, 2017, Éditeur Pearson (ERPI)


QUIZ