CONVERSION DE TAUX

Sommaire

1. Vocabulaire

- Dates d'intérêt : dates où les intérêts sont versés;
- Période d'intérêt : intervalle de temps entre deux dates d'intérêt;
- Taux périodique : taux d'intérêt réel par période d'intérêt;
- Capitalisation : le fait d'ajouter les intérêts au capital;
- Taux nominal : Ce taux, calculé sur une base annuelle, ne sert qu'à déterminer le taux périodique. C'est généralement ce taux qui est affiché. Il devrait toujours être accompagné d'une précision sur le type de capitalisation. Par exemple, un taux de "8 % capitalisé semestriellement" signifie que la période d'intérêt est le semestre et que le taux périodique (semestriel) est $\frac{8\,\%}{2} = 4\,\%$. Le taux nominal ne correspond pas au taux annuel réel, sauf si la capitalisation est annuelle;
- Taux effectif : taux d'intérêt annuel réel.

2. Équivalence de taux

Imaginez la situation suivante : une banque A vous offre un taux annuel effectif de 6 %; une banque B vous offre un taux périodique de 1,5 % par trimestre. Comment feriez-vous pour déterminer quelle banque offre le meilleur rendement? Pour comparer deux taux d'intérêt, il faut pouvoir les évaluer sur une même période. Par exemple, nous pouvons trouver le taux annuel qui est équivalent à un taux trimestriel de 1,5 % et vérifier s'il est plus élevé que 6 %. Cette **conversion** doit se faire en respectant la valeur qui serait accumulée à un taux donné.

Définition

> Deux taux sont dits **équivalents** si, pour un placement initial identique sur un même intervalle de temps (une année complète, par exemple), les valeurs acquises par le placement initial calculées aux deux taux sont égales.

Considérons le cas où nous versons un montant V0 dans un banque offrant un taux trimestriel i_{trim}. Au bout d'une année complète, c'est-à-dire 4 trimestres, la valeur acquise sera :

$$V_0(1+i_{trim})^4$$

Supposons maintenant qu'une autre banque offre un taux annuel i_{ann}. Au bout d'une année complète, la valeur acquise du même $\mathrm{V}_0(1+\mathrm{i}_{\mathrm{trim}})^4$ montant sera $V_0(1+i_{ann})^1$.

Selon la définition, les taux i_{ann} et i_{trim} sont équivalents si

$$V_0(1+i_{trim})^4 = V_0(1+i_{ann})^1$$

$$\Leftrightarrow (1+i_{trim})^4 = (1+i_{ann})^1$$

Remarquez que la valeur initiale du placement n'importe pas du tout. Cette relation permet de passer d'un taux trimestriel à un taux annuel équivalent, ou l'inverse.

Exemple 1

La banque A vous offre un taux annuel (effectif) de 6 %; la banque B vous offre un taux de 1,5 % par trimestre. Laquelle des deux banques offre le meilleur rendement.

Solution

La banque B offre un taux trimestriel de 1,5 %. Le taux annuel équivalent (ou taux effectif) à ce taux peut être obtenu par la relation

$$\begin{gathered}(1+\mathrm{i}_{\mathrm{trim}})^4 = 1+\mathrm{i}_{\mathrm{ann}} \\ (1{,}015)^4 = 1+\mathrm{i}_{\mathrm{ann}} \\ \mathrm{i}_{\mathrm{ann}} = (1{,}015)^4 - 1 = 0{,}06136355\end{gathered}$$

La banque B, avec son taux annuel (effectif) de 6,136355 % offre donc un meilleur rendement que la banque A.

Solution alternative

La banque A offre un taux effectif de 6 %. Le taux trimestriel équivalent est aussi obtenu de la relation :

$$\begin{gathered}(1+\mathrm{i}_{\mathrm{trim}})^4 = 1+\mathrm{i}_{\mathrm{ann}} \\ (1+\mathrm{i}_{\mathrm{trim}})^4 = 1+0{,}06 = 1{,}06 \\ ((1+\mathrm{i}_{\mathrm{trim}})^4)^{1/4} = (1{,}06)^{1/4} \\ 1+\mathrm{i}_{\mathrm{trim}} = (1{,}06)^{1/4} \\ \mathrm{i}_{\mathrm{trim}} = (1{,}06)^{1/4} - 1 = 0{,}014673846 \text{ i.e } 1{,}4673846\ \%\end{gathered}$$

Ce taux étant inférieur au taux trimestriel offert par la banque B, on arrive à la même conclusion.

Le raisonnement que nous venons d'effectuer s'applique à toutes les conversions de taux. Un taux périodique peut toujours être converti pourvu que la relation d'équivalence des taux soit respectée :

Relation d'équivalence des taux

$$(1+i_{ann})^1 = (1+i_{sem})^2 = (1+i_{trim})^4 = (1+i_{mens})^{12}$$

On doit s'assurer que cette relation est satisfaite pour que la valeur accumulée d'un placement de 1 $, capital et intérêts, à la fin d'une année complète soit la même quel que soit le mode de capitalisation.

Exemple 2

Quel est le taux mensuel équivalent à un taux trimestriel de 2,5 %?

Solution

Nous cherchons à trouver i_{mens} sachant que $i_{trim} = 2{,}5\ \%$. Selon la relation d'équivalence des taux, l'égalité

$$(1+i_{trim})^4 = (1+i_{mens})^{12}$$

doit être satisfaite. Il reste à isoler i_{mens} :

$$\begin{aligned}
(1+i_{mens})^{12} &= (1+i_{trim})^4 \\
(1+i_{mens})^{12} &= (1+2{,}5\%)^4 \\
\left((1+i_{mens})^{12}\right)^{1/12} &= \left((1{,}025)^4\right)^{1/12} \\
(1+i_{mens})^{12/12} &= (1{,}025)^{4/12} \\
1+i_{mens} &= (1{,}025)^{1/3} \\
i_{mens} &= (1{,}025)^{1/3} - 1 \\
i_{mens} &= 0{,}8265\%
\end{aligned}$$

Exemple 3

Quel est le taux mensuel équivalent à un taux annuel de 8 %, capitalisation semestrielle ?

Solution

D'abord, il faut interpréter le taux de 8 % comme étant nominal puisqu'il est accompagné d'une précision sur le type de capitalisation. Un taux de 8 %, capitalisation semestrielle, représente en réalité un taux de 4 % semestriel ($\frac{8\ \%}{2} = 4\ \%$, semestres/année), si on laisse les intérêts se capitaliser. Nous cherchons donc à trouver i_{mens}sachant que $i_{sem} = 4\ \%$. Selon la relation de l'équivalence des taux, l'identité

$$(1 + i_{mens})^{12} = (1 + i_{sem})^2$$

doit être satisfaite. Il reste à isoler i_{mens}:

$$(1 + i_{mens})^{12} = (1 + 4\%)^2$$
$$((1 + i_{mens})^{12})^{1/12} = ((1{,}04)^2)^{1/12}$$
$$(1 + i_{mens})^{12/12} = (1{,}04)^{2/12}$$
$$1 + i_{mens} = (1{,}04)^{1/6}$$
$$i_{mens} = (1{,}04)^{1/6} - 1$$
$$i_{mens} = 0{,}6558\%$$

3. Exercice

Soit un taux annuel de 15 %. Trouver les taux périodiques i_{sem}, $i_{mens,}i_{trim}$ qui lui sont équivalents.

(rép : 7,23805 %; 3,55581 %; 1,17149 %)