FACTORISATION DE FONCTIONS QUADRATIQUES

Sommaire

Le but de la rubrique suivante est de résumer les méthodes permettant de factoriser les équations quadratiques, c'est-à-dire de forme $ax^2 + bx + c$. Autant que possible, nous éviterons d'utiliser la fameuse formule quadratique

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Trois méthodes nous permettront d'effectuer la factorisation de la plupart des fonctions quadratiques.

1. Différence de carrés

Il existe une forme quadratique qui permet une factorisation rapide. Lorsqu'un fonction présente la forme $x^2 - k^2$, celui peut être décomposer en facteurs par la formule de différence des carrés, c'est-à-dire

$$x^2 - k^2 = (x - k)(x + k).$$

En somme, il suffit d'obtenir la racine carrée du premier et du second terme et de faire le produit de leur somme avec leur différence. Le signe négatif séparant les termes x^2et k^2 est d'une importance capitale. Par exemple, la règle présentée ci-dessus ne peut s'appliquer à $x^2 + k^2$, d'où le nom *différence* de carrés !

Exemple

$x^2 - 9 = x^2 - (3)^2 = (x - 3)(x + 3)$

$x^2 - 100 = x^2 - (10)^2 = (x - 10)(x + 10)$

$x^2 - 81 = x^2 - (9)^2 = (x - 9)(x + 9)$

Dans les exemples précédents, nous avons choisi d'employer des valeurs qui sont des carrés parfaits. Ce critère n'est pas nécessaire en général. Par exemple, quoique 8 ne soit pas un carré parfait, sa racine est bien définie (elle existe) et est égale à $\sqrt{8}$.

Exemple

$$x^2 - 8 = x^2 - (\sqrt{8})^2 = (x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8})$$

$$x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

$$x^2 - 45 = x^2 - (\sqrt{45})^2 = (x - \sqrt{45})(x + \sqrt{45})$$

Aussi, il est possible que le premier terme lui-même ne soit pas x^2 mais plutôt $9x^2$. Encore une fois, il n'y a pas lieu de s'inquiéter. Il suffira de trouver la racine carrée de $9x^2$ plutôt que celle de x^2. En tout autre point, la méthode restera la même.

Exemple

$$9x^2 - 25 = (3x)^2 - (5)^2 = (3x - 5)(3x + 5)$$

$$16x^2 - 49 = (4x)^2 - (7)^2 = (4x - 7)(4x + 7)$$

$$8x^2 - 9 = (\sqrt{8}x)^2 - (3)^2 = (\sqrt{8}x - 3)(\sqrt{8}x + 3)$$

2. Mise en évidence simple

Il faut éviter de confondre la forme de la différence de carrés x^2 - k^2 avec ax^2 - bx. La présence d'un x dans le second terme nous permettra plutôt de procéder par mise en évidence simple. Ceci revient à factoriser tout ce qui est commun aux deux termes de l'expression, c'est-à-dire le x.

Exemple

$$x^2 - 6x = x(x - 6)$$

Nous avons mis en évidence (placé devant un parenthèse) un x puisque chacun des termes de $x^2 - 6x$ possède au moins un x. Remarquez que le produit $x(x - 6)$ est bien égal à $x^2 - 6x$. Vous pouvez vous convaincre en distribuant (multipliant) le x à chacun des termes de l'expression $(x - 6)$. Vous pouvez interpréter la mise en évidence simple comme étant l'opération de séparer tous les facteurs communs aux termes d'une expression.

Exemple

Factoriser $25x^2 - 10x$

Quels sont tous les facteurs communs à $25x^2 - 10x$? Chacun possède au moins un x. Les coefficients 25 et 10 ont également un commun le facteur 5. $5x$ constitue donc le plus grand commun facteur de $25x^2$ et $10x$. Si $5x$ est retiré de ces termes (pour plutôt être mis en évidence), que reste-t-il de $25x^2$ et $10x$? De $25x^2$, il restera $5x$. De $10x$, il restera 2. Par conséquent,

$25x^2 - 10x = 5x(5x - 2)$

Exemple

Factoriser les fonctions quadratiques suivantes par mise en évidence simple.

$x^2 + 12x = x(x + 12)$

$2x^2 + 12x = 2x(x + 6)$

$-36x^2 + 6x = 6x(-6x + 1)$ ou-$6x(6x - 1)$

$225x^2 - 45x = 15x(15x - 3)$

$9x^4 - 16x^2 = x^2(9x^2 - 16) = x^2(3x - 4)(3x + 4)$

Veuillez noter que dans l'exemple 5, nous avons utilisé une mise en évidence suivi d'une différence de carrés… rien ne nous empêche d'utiliser ou de combiner deux méthodes de factorisation au cours d'un même problème. Il faut donc être à l'aise avec l'ensemble des méthodes que nous vous suggérons.

3. Mises en évidence composées

Considérons l'équation quadratique $x^2 + 5x + 6$. Il ne s'agit clairement pas d'un problème qui puisse être résolu par différence de carrés, la forme ne s'y prêtant pas. Aussi, vous constaterez qu'aucun facteur commun ne puisse être mis en évidence. Or, ajustons la fonction quadratique un peu

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6$$

Vous remarquerez que nous n'avons pas triché : quoique nous ayons réécrit la fonction, sa valeur totale n'a pas changée. Sous cette nouvelle présentation, remarquez qu'une factorisation peut être effectuée aux paires de termes $x^2 + 2x$ et $3x + 6$. En effet, x

est facteur commun de $x^2 + 2x$, et 3 est facteur commun de $3x + 6$. En procédant à une factorisation simple, paire par paire, nous obtenons

$x^2 + 2x + 3x + 6 = x(x + 2) + 3(x + 2)$.

Mais, là n'est pas tout ! Maintenant, de cette nouvelle expression, $(x + 2)$ est un facteur commun. Nous pouvons donc mettre $(x + 2)$ en évidence. Ainsi, de $x(x + 2)$, il restera *x*. De $3(x + 2)$, il restera 3. Par conséquent,

$$x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3)$$

Remarquez que nous avons effectué trois mises en évidence consécutives afin de compléter cette factorisation, d'où le nom *mises en évidence composées.*

Il reste un aspect de la méthode qui reste inexpliquée : pourquoi réécrire $\boldsymbol{x^2 + 5x + 6}$ sous la forme $x^2 + 2x + 3x + 6$ plutôt que $x^2 + x + 4x + 6$ ou $x^2 + 9x - 4x + 6$? Voici donc le processus permettant de découvrir de quelle façon séparer le terme central (multiple de *x*) :

Soit $ax^2 + bx + c$, une fonction quadratique. Il faut séparer le terme bx afin d'obtenir la factorisation complète. Pour ce faire, nous devons trouver deux nombres, m et n, tels que :

1. le produit $mn = a$c

2. la somme $m + n = b$

Une fois les nombres m et n trouvés, remplacer l'expression $ax^2 + bx + c$ par $ax^2 + mx + nx + c$ et procéder par une factorisation par mises en évidence composées.

Exemple

Factoriser la fonction quadratique $x^2 + 5x + 6$.

Les coefficients sont respectivement

$a = 1$

$b = 5$

$c = 6$

Puisque $b \neq 0$ et $c \neq 0$, nous devons d'abord séparer en deux parties le terme central, 5*x*. Pour ce faire, il nous faut trouver deux nombres, m et n, tels que

1. le produit $mn = ac = (1)(6) = 6$

2.la somme $m + n = b = 5$

Quels sont les deux nombres dont le produit est 6 et la somme est 5 ? Par tâtonnement, vous trouverez que $m = 2$ et $n = 3$. Nous utilisons ces deux nombres pour substituer $5x$ par $2x + 3x$. Ainsi, $x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6$. Nous pouvons poursuivre maintenant par mises en évidence composées :

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 = x(x + 2) + 3(x + 2)$$
$$= (x + 2)(x + 3)$$

Exemple

Factoriser la fonction quadratique $6x^2 - 17x + 12$.

Les coefficients sont respectivement

$a = 6$

$b = 17$

$c = 12$

Puisque $b \neq 0$ et $c \neq 0$, nous devons d'abord séparer en deux parties le terme central, $-17x$. Pour ce faire, il nous faut trouver deux nombres, m et n, tels que

1.le produit $mn = ac = (6)(12) = 72$

2. la somme $m + n = b = -17$

Quels sont les deux nombres dont le produit est 72 et la somme est -17 ? Vous trouverez que $m = -8$ et $n = -9$. Notez bien que les signes négatifs importent beaucoup puisque nous voulons bien une somme de -17. Nous utilisons ces deux nombres pour substituer $-17x$ par $-8x - 9x$. Ainsi,

$$6x^2 - 17x + 12 = 6x^2 - 8x - 9x + 12$$

Nous pouvons poursuivre maintenant par mises en évidence composées, en commençant toujours par trouver les facteurs communs à chaque paire de termes : 2*x* est facteur commun de $6x^2 - 8x$; -3 est facteur commun de $-9x + 12$ (il faut en général s'assurer de factoriser le signe négatif de *x* s'il en a un). Puis nous complétons la factorisation.

$$6x^2 - 17x + 12 = 6x^2 - 8x - 9x + 12 = 2x\,(3x - 4) - 3\,(3x - 4)$$
$$= (3x - 4)\,(2x - 3)$$

Exemple

Factoriser la fonction quadratique $3x^2 - x - 10$.

Les coefficients sont respectivement

$a = 3$

$b = -1$

$c = -10$

Puisque $b \neq 0$ et $c \neq 0$, nous devons d'abord séparer en deux parties le terme central, $-x$. Pour ce faire, il nous faut trouver deux nombres, m et n, tels que

1. le produit $mn = ac = (3)(-10) = -30$

2. la somme $m + n = b = -1$

Quels sont les deux nombres dont le produit est -30 et la somme est -1? La seule combinaison de nombres possible est $m = -6$ et $n = 5$. Notez encore que les signes doivent être choisis afin de répondre aux critères de produit et somme… Nous utilisons ces deux nombres pour substituer *-x* par -6*x +* 5*x*. Ainsi,

$$3x^2 - 1x + 12 = 3x^2 - 6x + 5x - 10$$

Nous pouvons poursuivre maintenant par mises en évidence composées, en commençant par trouver les facteurs communs à chaque paire de termes :

$3x$ est facteur commun de $3x^2 - 6x$;

5 est facteur commun de $5x - 10$.

Puis nous complétons la factorisation

$$3x^2 - x - 10 = 3x^2 - 6x + 5x - 10 = 3x\,(x - 2) + 5\,(x - 2)$$
$$= (x - 2)\,(3x + 5)$$

4. Exercices

Exprimer les fonctions quadratiques suivantes en facteurs :

1. $4x^2 - 25$
2. $3x^2 - 12x$
3. $2x^2 - 8$
4. $3x^2 + 7x - 6$
5. $x^2 - 3x - 28$
6. $x^2 - 12x + 36$
7. $8x^2 + 7x - 1$
8. $4x^2 - 4x + 1$
9. $10x^2 - 3x - 4$
10. $x^2 - 9x + 20$

Solutions

1. $(2x - 5)(2x + 5)$
2. $3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$
3. $2(x^2 - 4) = 2(x - 2)(x + 2)$
4. $(3x - 2)(x + 3)$
5. $(x - 7)(x + 4)$
6. $(x - 6)(x - 6) = (x - 6)^2$
7. $(8x - 1)(x + 1)$
8. $(2x - 1)(2x - 1) = (2x - 1)^2$
9. $(2x + 1)(5x - 4)$
10. $(x - 5)(x - 4)$