FONCTIONS QUADRATIQUES, EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

Sommaire

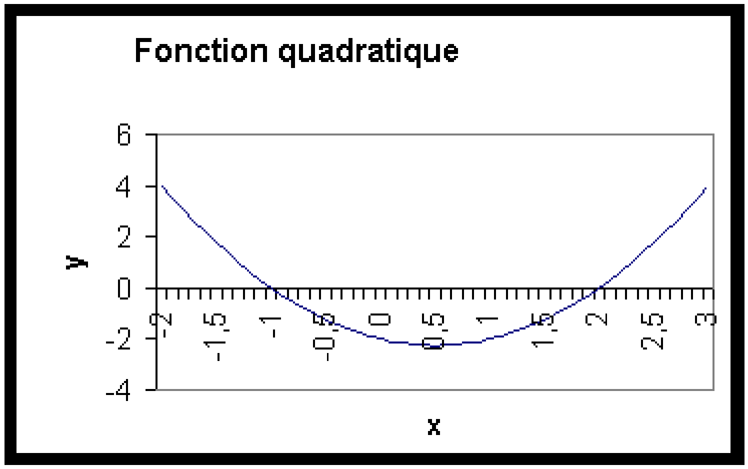
1. Paraboles

On appelle communément paraboles, ou quadratiques, les fonctions polynomiales du second degré. On reconnaît une parabole à la forme de son équation :

$$y = ax^2 + bx + c$$

Quoique nous ne nous attarderons pas très longtemps aux fonctions quadratiques, il est important de savoir les schématiser graphiquement avec suffisamment de précision.

Vous avez sûrement déjà observé dans le passé la forme très particulière d'une parabole, caractérisée par son sommet et ses "ailes"…



Comment peut-on obtenir les caractéristiques de la parabole afin de tracer le graphe de celle-ci ?

Le graphe d'une parabole peut facilement être tracé en obtenant les informations suivantes :

- Où se situe le sommet de la parabole ?
- La parabole est-elle ouverte vers le haut ou le bas ?
- Quelle est son ordonnée à l'origine ?
- La parabole a-t-elle des racines (des zéros) ?

1.1. Sommet d'une parabole

Soit $y = ax^2 + bx + c$ l'équation d'une parabole quelconque.

La valeur de x où se trouve le sommet est $x = \frac{-b}{2a}$.

La valeur de y correspondante est obtenue en substituant x dans l'équation de la parabole.

1.2. Orientation d'une parabole

L'orientation de la parabole est déterminé par le signe de "a", le coefficient de x^2.

Si $a > 0$, la parabole est ouverte vers le haut.

Si $a < 0$, la parabole est ouverte vers le bas.

Notons que si la parabole est ouverte vers le haut, son sommet correspond à un minimum alors que si elle est ouverte vers le bas, il correspond à un maximum.

1.3. Ordonnée à l'origine d'une parabole

Nous avons appris à la section à propos des droites que l'ordonnée à l'origine est la valeur prise par y lorsque $\boldsymbol{x} = 0$.

Dans le cas d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, si $\boldsymbol{x} = 0$ alors $\boldsymbol{y} = c$.

Le point $(0, c)$ est donc l'ordonnée à l'origine de la parabole.

1.4. Racines (ou zéros) d'une parabole

<u>**Définition**</u> : Toute valeur de x pour laquelle une fonction $y = f(x)$ prend la valeur 0 est appelée **racine**.

Pour trouver les racines d'une parabole $y = ax^2 + bx + c$, il faut résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. On peut procéder par factorisation ou utiliser la formule :

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemple

Tracer le graphe de la parabole dont l'équation est $y = 2x^2 + 3x - 5$.

Sommet de la parabole:

Le sommet est situé à la position $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2(2)} = \frac{-3}{4} = -0{,}75$.

et la valeur de y correspondante est $y = 2(-0{,}75)^2 + 3(-0{,}75) - 5 = -6{,}125$

le sommet se trouve donc au point $(-0{,}75\,;\,-6{,}125)$

La parabole est ouverte vers le haut puisque $a > 0$.

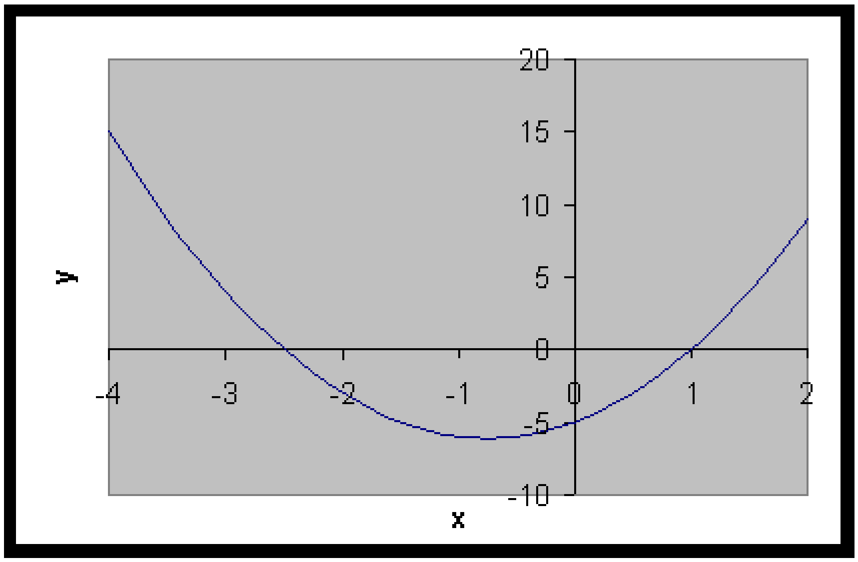
L'ordonnée à l'origine est la valeur de y obtenue lorsque $x = 0$. Dans ce cas, $y = 2(0)^2 + 3(0) - 5 = -5$. Le point $(0, -5)$ est donc l'ordonnée à l'origine.

En utilisant la formule générale $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ on obtient:

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4}$$

Ainsi, $x = 1$ et $x = -2{,}5$ sont les racines de la parabole. Les points $(-2{,}5\,;\,0)$ et $(1\,;\,0)$ se retrouvent donc sur la parabole.

En combinant toutes les informations dévoilées dans les quatre étapes ci-dessus, nous pouvons tracer précisément le graphe de la parabole $y = 2x^2 + 3x - 5$



2. Fonctions exponentielles

Définition :On appelle exponentielle de base a toute fonction dont la forme satisfait

$$f\,(x) = a^x,\text{ où } a > 0 \ et\ (a \neq 1).$$

Particularité : quelle que soit la valeur de a, une fonction exponentielle passera toujours par l'ordonnée à l'origine $(0{,}1)$.

Domaine : Une fonction exponentielle est définie pour toute valeur de x, d'où

$$Dom(a^x) = \mathbb{R}$$

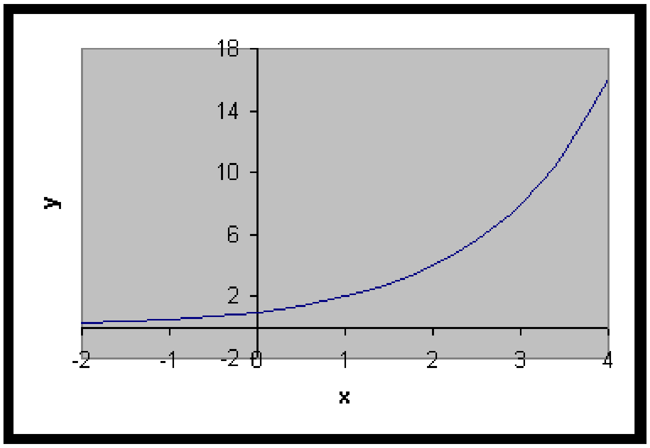
Image : Quelles que soient les valeurs de a et x, une fonction exponentielle demeure strictement positive, d'où

$$Im(a^x) = \{y \mid y > 0\}$$

Comportement d'une fonction exponentielle : Une fonction exponentielle a un comportement monotone. Elle est

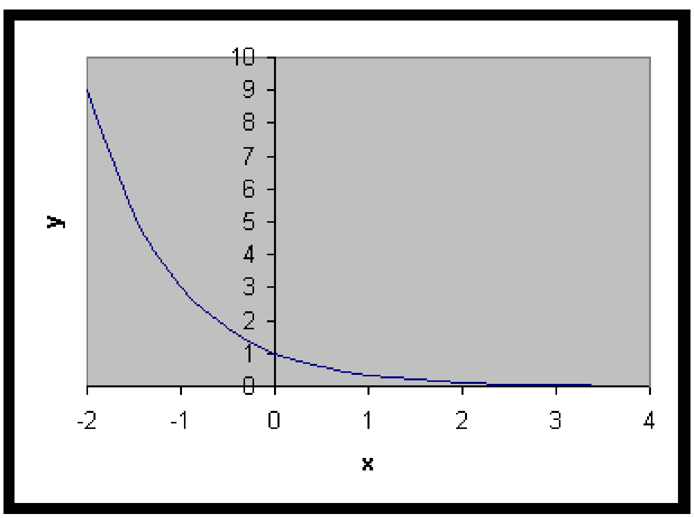
- strictement croissante si $a > 1$

Graphique de la fonction $y = 2^x$



- strictement décroissante si $0 < x < 1$

Graphique de la fonction $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Remarque : une fonction exponentielle, quelle que soit la valeur de a, ne possède *aucune racine*.

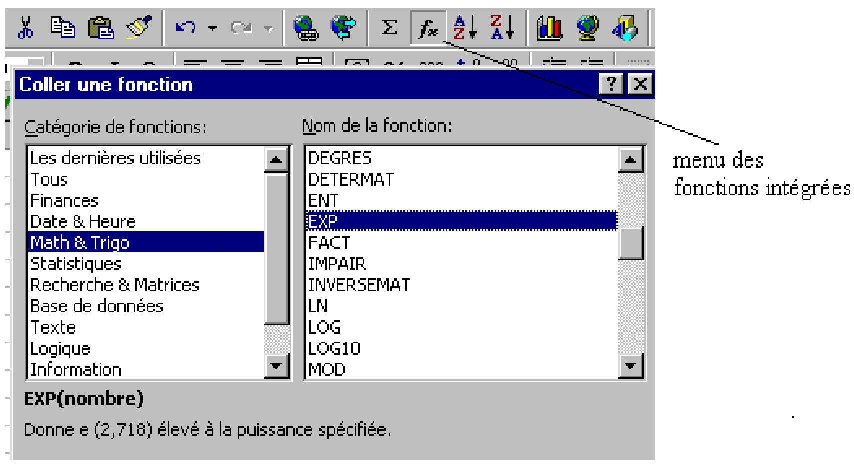
La valeur particulière $a = e = 2{,}71828\ldots$, appelée base népérienne ou naturelle, est la plus connue et la plus exploitée des fonctions exponentielles.

La fonction $f(x) = e^x$ possède les mêmes caractéristiques que toute autre fonction exponentielle dont la base $a > 1$.

2.1. Utilisation d'Excel dans le calcul de la fonction exponentielle e^x

Le logiciel Excel est muni de fonctions intégrées permettant le calcul rapide de fonctions exponentielles en base népérienne

Sur une feuille Excel, sélectionner l'icône $\boldsymbol{f_x}$ et la catégorie de fonctions **Math & Trigo.** Choisir la fonction EXP



Une fenêtre de dialogue s'ouvrira et vous demandera quelle valeur vous souhaitez donner à l'exposant.

Exercice

Soit la fonction exponentielle $f(x) = e^x$. Calculer, à l'aide d'Excel, les valeurs suivantes :

a. $f\ (1)$
b. $f\ (3)$
c. $f\ (-1)$
d. $f\ (-3/2)$

(réponses : $f(1) = e^1 = 2{,}71828$; $f(3) = e^3 = 20{,}0855$; $f(-1) = e^{-1} = 0{,}3679$; $f(\frac{-3}{2}) = e^{\frac{-3}{2}} = 0{,}2231$).

2.2. Loi des exposants

Un certain nombre de propriétés des exposants seront nécessaires afin d'effectuer des manipulations algébriques. Voici la liste des lois les plus importantes :

1) $a^m a^n = a^{m+n}$

2) $a^0 = 1$

3) $(a^m)^n = a^{mn}$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

6) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

7) $(ab)^m = a^m b^m$

Exercice

À l'aide des lois des exposants, simplifier les expressions algébriques suivantes :

$a)\ \frac{x^2x^4}{x^3}$

$b)\ \sqrt{16y^2x^2}$

$c)\ \frac{2x^4y^3}{8y^5x^2}$

$$d)\ \frac{z^3(y\sqrt{x})^2}{xyz}$$

3. Fonctions logarithmiques

Si on vous disait que $e^x = 3$, comment feriez-vous pour trouver la valeur de x ? La réponse à cette question est donnée par la définition suivante :

Définition : Le logarithme naturel (ou néperien), ln x, est la fonction inverse de la fonction exponentielle e^x . Ainsi, $\ln(e^x) = x$ et $e^{lnx} = x$

Domaine : La fonction logarithmique $ln\,x$ est définie pour toute valeur strictement positive de x, d'où

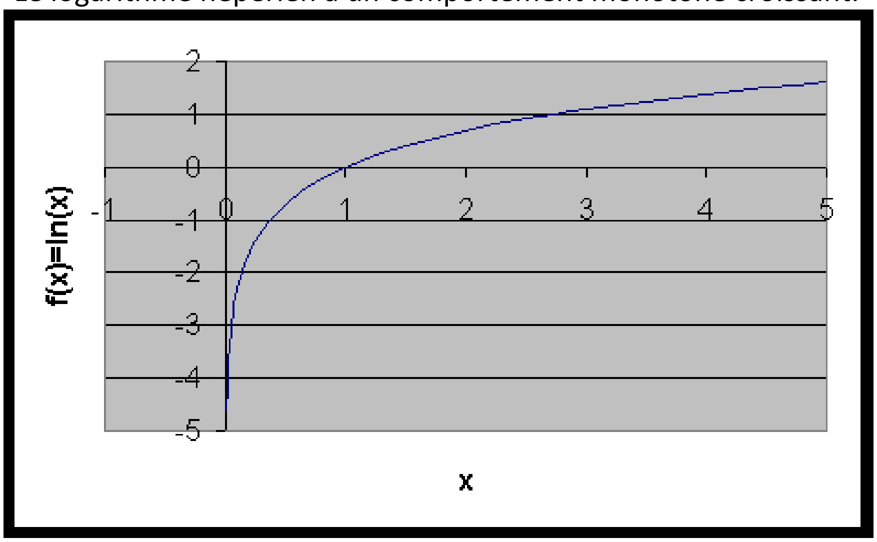
$$Dom(ln\,x) = \{x \mid x > 0\}$$

Image :

$$Im(\ln x) = \mathbb{R}$$

Comportement de la fonction $\boldsymbol{ln\,x}$

Le logarithme népérien a un comportement monotone croissant.



Exemple

À l'aide de la définition du logarithme naturel, trouver la valeur de $\boldsymbol{x}$ telle que l'équation $\boldsymbol{e^x} = 3$ est satisfaite.

$$e^x = 3 \rightarrow \ln(e^x) = \ln(3)$$

$$x = \ln 3$$

L'utilisation que nous venons de faire de la fonction logarithmique s'appliquera tout aussi bien à la résolution d'équation plus complexes.

Exemple

Résoudre l'équation $e^{2x+3} \ = \ 10$.

$$\boldsymbol{e^{2x+3}} \ = \ 10 \ \rightarrow \ln(\boldsymbol{e^{2x+3}}) = \ln\,(10)$$

$$\rightarrow 2x + 3 = \ln\,(10)$$

$$\rightarrow 2x = \ln(10) - 3$$

$$\rightarrow x = \frac{ln\,(10)-3}{2}$$

Exemple

Quelle est la valeur de x telle que $ln(8x - 9) = 20$?

Servons-nous du fait que la fonction inverse de $\ln x$ est e^x **:**

$$ln(8x - 9) = 20 \rightarrow \ \mathrm{e}^{\ln\left(e^{8x-9}\right)} = \mathrm{e}^{20}$$

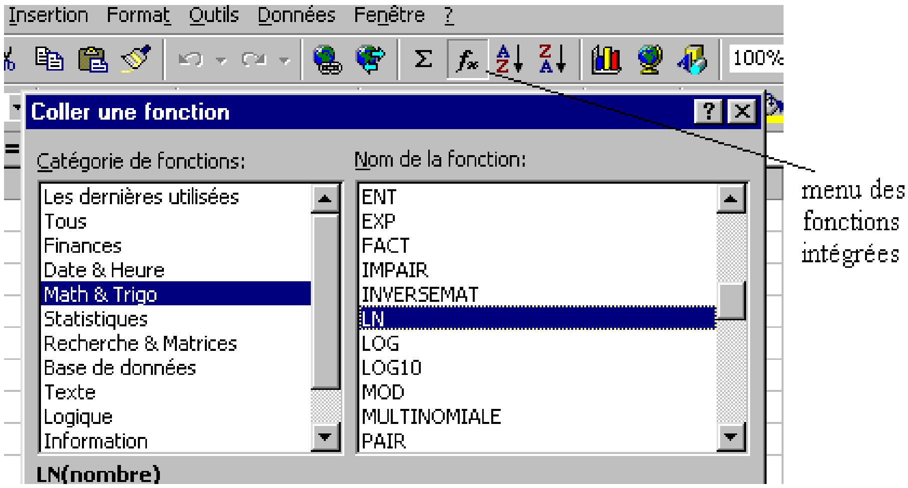
$$\rightarrow 8x - 9 = \mathrm{e}^{20}$$

$$\rightarrow 8x = \mathrm{e}^{20} + 9$$

$$\rightarrow x = \frac{\mathrm{e}^{20} + 9}{8}$$

3.1. Utilisation d'Excel dans le calcul de fonctions logarithmiques

Le logiciel Excel est muni de la fonction intégrée $ln(\,)$, permettant ainsi le calcul rapide de la fonction logarithmique en base népérienne. Sur une feuille Excel, sélectionnez l'icône $\boldsymbol{f_x}$ et la catégorie de fonctions **Math & Trigo.**



Une fenêtre de dialogue s'ouvrira et vous demandera quelle valeur vous souhaitez donner à l'exposant.

Exercice
Soit la fonction logarithmique $f\,(x) = ln\,x$. Calculer, à l'aide d'Excel, les valeurs suivantes :

a. $f\,(1)$
b. $f\,(3)$
c. $f\,(e^2)$
d. $f\,(-3)$

3.2. Propriétés des logarithmes

Certaines propriétés des logarithmes peuvent être utiles afin de simplifier certaines expressions algébriques ou encore résoudre des équations :

1) $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$

2) $ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

3) $\ln(a^b) = b.\ln a$

4) $\ln 1 = 0$

Exemple

À l'aide des propriétés des logarithmes, trouver la valeur de x telle que

$$4^x = 24$$

L'équation exponentielle que nous devons résoudre a une base autre que e. Toutefois, la propriété 3 permettra de la résoudre en utilisant un cheminement similaire à celui des exemples précédents :

$$4^x = 24 \rightarrow \ln 4^x = \ln(24)$$

$$x. \ln 4 = \ln 24$$

$$x = \frac{\ln 24}{\ln 4} \approx 2.2925$$