LA DÉRIVÉE SECONDE

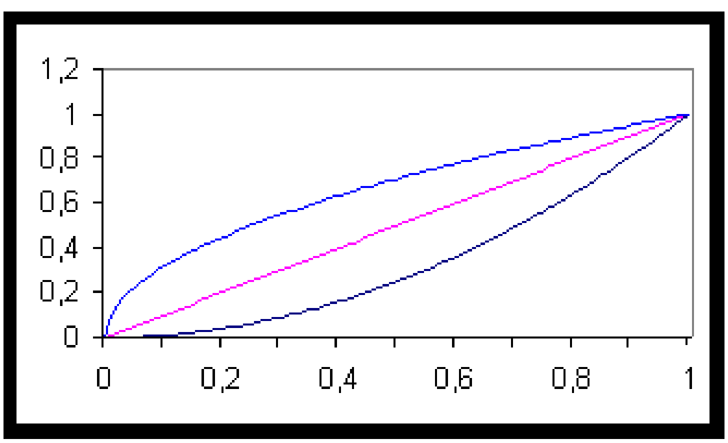
Sommaire

La rubrique précédente nous a permis d'analyser une fonction par sa dérivée première. Les points stationnaires, critiques, minimum et maximum pouvaient tous être déterminés avec cette simple première dérivée.

Même si la dérivée première donne beaucoup d'information à propos d'une fonction, elle ne la caractérise pas complètement.

Considérons, par exemple, une fonction $f(x)$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ et supposons que sa dérivée première $f'(x)$ soit positive pour toute valeur x dans l'intervalle $[0, 1]$. Ces informations à propos de la fonction et de sa dérivée suffisent-elles pour avoir une idée précise du comportement de la fonction ?

La réponse est non. Tout ce qu'on peut dire c'est que la fonction passe par les points $(0,0)$ et $(1,1)$ et qu'elle est croissante sur l'intervalle $[0, 1]$. Le graphique suivant illustre 3 fonctions qui satisfont ces conditions :



Les trois fonctions représentées passent bel et bien par les points $(0,0)$ et $(1,1)$ et sont croissantes sur l'intervalle considéré mais la façon dont chacune se rend d'un point à l'autre est bien différente. Elles diffèrent en fait par leur courbure.

1. Courbure - Concavité et convexité

Définition intuitive : Une fonction f est dite ***convexe*** sur un intervalle I si, pour toute paire de points sur le graphe de $f(x)$, le segment de droite qui relie ces deux points passe au-dessus de la courbe de $f(x)$.

Une fonction f est dite ***concave*** sur un intervalle I si, pour toute paire de points sur le graphe de $f(x)$, le segment de droite qui relie ces deux points passe en dessous de la courbe de $f(x)$.

Théorème :

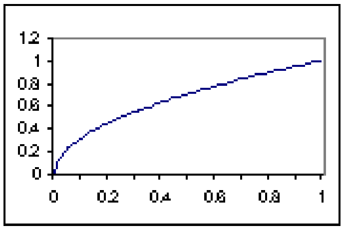
Soit $f(x)$, une fonction deux fois continûment dérivable sur I, un intervalle. La fonction f est :

- Convexe si $f''(x) > 0$ pour tout x dans I
- Concave si $f''(x) < 0$ pour tout x dans I

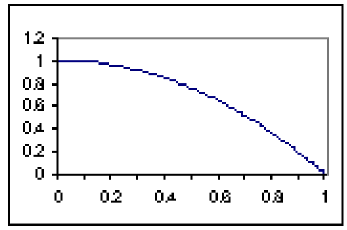
Interprétation

Une fonction convexe possède une *dérivée première croissante* ce qui lui donne l'allure de courber vers le haut. Au contraire, une fonction concave possède une *dérivée première décroissante* ce qui lui donne l'allure de courber vers le bas. Il est important de comprendre la distinction entre la dérivée première, qui nous informe à propos de la pente de la tangente d'une fonction, et la dérivée seconde, qui indique de quelle façon celle-ci est courbée.

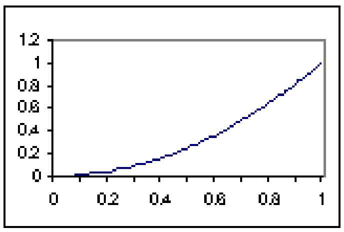
Est-ce qu'une fonction croissante est toujours convexe ? Est-ce qu'une fonction décroissante est toujours concave ? Justifiez votre réponse à l'aide des schémas suivants.



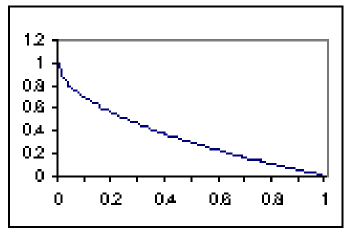
f ' >0, f '' <0



f ' <0, f '' <0



f ' >0, f '' >0



f ' <0, f '' >0

Exemple 1

Étudier la courbure de la fonction $f(x) = x^2 + 2x - 4$.

Solution

$f(x) = x^2 + 2x - 4$

$f'(x) = 2x + 2$

$f''(x) = 2 > 0$

La fonction $f(x) = x^2 + 2x - 4$ est telle que $f''(x) > 0$ pour tout $\boldsymbol{x}$. Elle est donc toujours convexe.

Exemple 2

Trouver les intervalles sur lesquels la fonction $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ est concave.

Solution

Par définition, une fonction est concave si $f''(x) < 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}.(x^2+1)' \qquad \text{(dérivée en chaîne)}$$

$$= \frac{2x}{x^2+1}$$

$$f''(x) = \frac{(2x)'.(x^2+1) - 2x.(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \qquad \text{(dérivée d'un quotient)}$$

$$= \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

Puisque le dénominateur de $f''(x)$ est toujours positif, le signe de $f''(x)$ sera déterminé par celui du numérateur : $2 - 2x^2 = 2(1-x^2) = 2(1-x)(1+x)$.

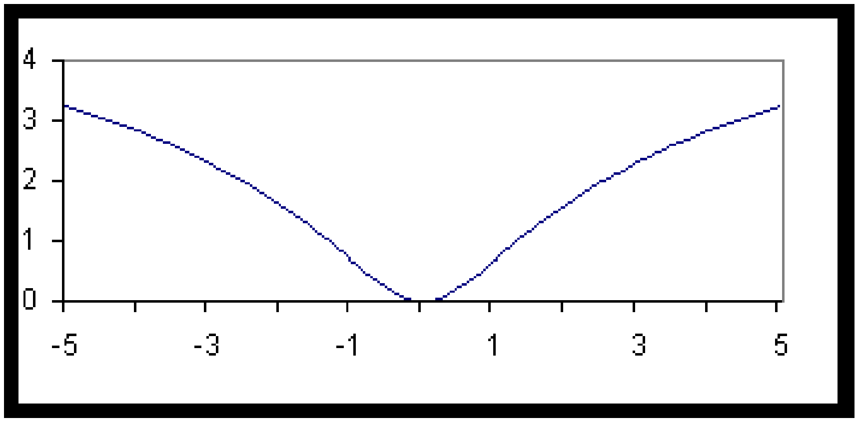
La meilleure façon de procéder est de trouver les valeurs de x pour lesquelles

$2(1-\boldsymbol{x})(1+\boldsymbol{x}) = 0$ puis d'étudier le signe de $2(1-\boldsymbol{x})(1+\boldsymbol{x})$ entre et autour de ces valeurs (un peu comme dans le tableau des variations).

$2(1-x)(1+x) = 0$ lorsque $x = 1$ et $x = -1$

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
Signe de f''	-	0	+	0	-
Concave Convexe	*concave* ∩		*convexe* ∪		*concave* ∩

Une fonction est concave lorsque $f''(x) < 0$, nous pouvons conclure ici que $f(x) = \ln(x^2+1)$ est concave sur les intervalles $x < -1$ et $x > 1$. Le graphe suivant montre le changement de la courbure de $f(x)$ aux points $x = -1$ et $x = 1$. (Les points où s'effectuent les changements de courbure sont difficiles à visualiser avec précision)



Exercice

1. Montrer que la fonction $f(x) = e^{x^2}$ ne change jamais de courbure.
2. Trouver les intervalles de concavité et de convexité de la fonction

   $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x + 6.$

À l'aide d'Excel, tracer le graphe afin de confirmer les résultats obtenus

2. Détermination de la nature d'un point stationnaire à l'aide de la dérivée seconde

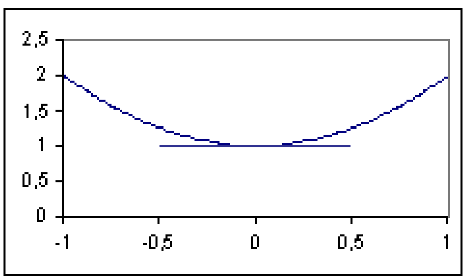
Nous avons discuté de la règle de la dérivée première qui permettait de vérifier si un point stationnaire ou critique est un optimum local. La dérivée seconde peut également être utilisée pour déterminer la nature d'un point stationnaire. Cependant, la règle de la dérivée seconde se limite à l'étude des points stationnaires.

Règle de la dérivée seconde

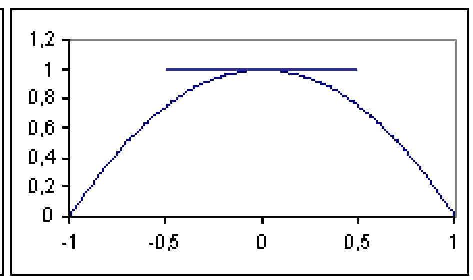
Soit la fonction $f(x)$ et $x = x*$ un point stationnaire de celle-ci.

$f\ (x^*)$ est :

- un minimum local si la fonction est convexe en x^* , i.e. $f\ ''(x^*) > 0$;
- un maximum local si la fonction est concave en x^* , i.e. $f\ ''(x^*) < 0$.



Fonction convexe en un point stationnaire : min local



Fonction concave en un point stationnaire : max local

Essentiellement, la règle de la dérivée seconde ne permet de découvrir aucune information qui n'était déjà connue grâce à la règle de la dérivée première. Cependant, il peut être plus rapide d'utiliser la règle de la dérivée seconde lorsque celle-ci est facile à effectuer.

Méthodologie : identification des points stationnaires de $f(x)$ par la règle de la dérivée seconde

1. Effectuer la dérivée première de $f(x)$;
2. Trouver tous les points stationnaires ;
3. Effectuer la dérivée seconde de $f(x)$;
4. Évaluer $f''\ (x)$ aux points stationnaires ;
5. Appliquer la règle de la dérivée seconde. Conclure.

Exemple 1

Trouver tous optima locaux de la fonction $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$.

1. **Effectuer la dérivée première de $f(x)$:**

   $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

   $= 6(x^2 - x - 2)$

2. **Trouver tous les points stationnaires :**

   Nous obtenons un point stationnaire lorsque $f'(x) = 0$.

   $6(x^2 - x - 2) = 0$

   $x^2 - x - 2 = 0$

   $(x + 1)(x - 2) = 0 \rightarrow x = -1, x = 2$

   Il existe donc deux points stationnaires ($x = -1, x = 2$).

3. **Effectuer la dérivée seconde :**

   $f''(x) = (6x^2 - 6x - 12)'$

   $= 12x - 6$

4. **Évaluer $f''(x)$ aux points stationnaires :**

   $f''(-1) = 12(-1) - 6$

   $= -18$

   $f''(2) = 12(2) - 6$

   $= 18$

5.
6. **Appliquer la règle de la dérivée seconde. Conclure :**

- Au point stationnaire $\boldsymbol{x} = ▯1$, la dérivée seconde ($\boldsymbol{f}''(\mathbf{-1}) = \mathbf{-18} < 0$) est négative. La fonction est donc concave en ce point ce qui indique qu'il s'agit d'un maximum local.

- Au point stationnaire $\boldsymbol{x} = 2$, la dérivée seconde ($\boldsymbol{f}''(\mathbf{2}) = \mathbf{18} > 0$) est positive. La fonction est convexe en ce point ce qui indique qu'il s'agit d'un minimum local.

Un tableau des variations n'est donc pas nécessaire lors de l'application de la règle de la dérivée seconde. Toutefois, il est **essentiel** de vous rappeler que cette règle peut être appliquée seulement pour déterminer la nature de points stationnaires, jamais aux points critiques d'une fonction

3. Optima absolus

L'avantage de la dérivée seconde est que celle-ci permet d'identifier rapidement non seulement si un point stationnaire est un optimum local, mais également si celui-ci est un optimum absolu :

Définition : *Maximum et minimum absolus*

Soit $f\ (x)$ une fonction définie sur le domaine $Dom(f)$. Le point $x = x*$ est

- un *maximum absolu* de f si et seulement si $f\ (x*) > f\ (x)$ pour tout $x \in Dom(f)$.

- un *minimum absolu* de f si et seulement si $f\ (x*) < f\ (x)$ pour tout $x \in Dom(f)$.

Identification d'optima absolus à l'aide de la dérivée seconde :

Maximum absolu
Soient $f\ (x)$ une fonction définie sur le domaine $Dom(f)$, et $x = x^*$, un point stationnaire de f. Si la fonction est concave sur tout son domaine, c'est-à-dire si $f''(x) < 0$ pour tout $x \in Dom(f)$, alors la fonction possède un maximum absolu au point $x = x^*$.
Minimum absolu
Soient $f\ (x)$ une fonction définie sur le domaine $Dom(f)$, et $x = x^*$, un point stationnaire de f. Si la fonction est convexe sur tout son domaine, c'est-à-dire si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in Dom(f)$, alors la fonction possède un minimum absolu au point $x = x^*$.

Exemple

Trouver tous les optima de la fonction $f(x) = x^4 + 8x^2 - 3$. Indiquer de quel(s) type(s) d'optimum il s'agit.

Solution

$f(x) = x^4 + 8x^2 - 3$

$f'(x) = 4x^3 + 16x$

Point stationnaire $4x^3 + 16x = 0$

$$4x(x2 + 4) = 0$$

$$x = 0$$

$f''(x) = 12x^2 + 16 \rightarrow f''(0) = 16 > 0$

En vertu de la règle de la dérivée seconde, on retrouve un minimum local au point stationnaire $x = 0$. Par surcroît, puisque la fonction est toujours convexe ($f''(x) = 12x^2 + 16 > 0$), $f(0) = -3$ est un minimum absolu de f.

Exercice

Trouver le minimum absolu ou le maximum absolu de chacune des fonctions suivantes.

a. $f(x) = e^{x^2}$, où $x \in R$
b. $\frac{x^2}{(x^2+1)}$, où $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
c. $\sqrt{x^2 + 1}$, où $x \in R$