LES DÉTERMINANTS DE MATRICES

Sommaire

Utilité

Le déterminant sera un outil essentiel pour identifier les points maximum et minimum ou les points de selle d'une fonction de plusieurs variables.

1- Rappel - Définition et composantes d'une matrice

Une matrice est un tableau rectangulaire de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Une matrice est dite de dimension $m \times n$ lorsque celle-ci possède m rangées et n colonnes. Cette façon de décrire la taille d'une matrice est nécessaire afin d'éviter toute confusion entre deux matrices contenant le même nombre d'entrées. Par exemple, une matrice de dimension 3×4 possède 3 rangées et 4 colonnes. Celle-ci serait distincte d'une matrice 4×3 qui a 4 rangées et 3 colonnes, quoiqu'elle compte également 12 entrées. Une matrice est dite **carrée** lorsqu'elle a le même nombre de rangées et de colonnes.

On appelle éléments les entrées de la matrice, a_{ij}, qui sont identifiés par leur position. L'élément a_{32} serait l'entrée situé à la 3^e^ rangée et 2^e^ colonne de la matrice A. À nouveau, cette notation est essentielle afin de distinguer les éléments de la matrice entre eux. L'élément a_{23}, distinct de a_{32}, est situé à la 2^e^ rangée et 3^e^ colonne de la matrice A.

2- Le déterminant d'une matrice

À toute matrice carrée A correspond une valeur appelée le déterminant de A, que l'on dénote par

$$det(A) \text{ ou encore } |A|$$

Nous éviterons la définition formelle du déterminant (qui implique des notions de permutations) mais allons plutôt nous concentrer sur le calcul celui-ci.

3- Calcul du déterminant pour une matrice 2×2

Considérons la matrice A de dimension 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice A est définie par la relation

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Le résultat est donc obtenu en effectuant le produit des éléments opposés et en calculant la différence entre ces deux produits… une recette en quelque sorte qu'il vous faudra retenir!

Exemple

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de A est ainsi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

4- Exercice

Calculez le déterminant des matrices 2×2 suivantes :

$$a. \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad b. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c. \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad d. \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solutions : a) -17 b) 0 c) 5 d) 11

Avant de ne pouvoir évaluer le déterminant d'une matrice 3×3 (ou toute autre matrice de dimension supérieure), il nous faut d'abord voir quelques concepts qui s'y rattachent…

5- Définition d'un mineur

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Le mineur M_{12} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 1ère rangée et la 2^e colonne de A, c'est-à-dire

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 5.3 - 3.8 = 15 - 24 = -9$$

Le mineur M_{22} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 2^e rangée et la 2^e colonne de A, c'est-à-dire

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 4.8 = 6 - 32 = -26$$

6- Définition d'un cofacteur

Le cofacteur, C_{ij}, d'une matrice A est défini par la relation

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Vous constaterez que le cofacteur et le mineur ont toujours la même valeur numérique, à l'exception parfois de leur signe.

Considérons à nouveau la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Nous avons déjà montré que le mineur $M_{12} = -9$. Ainsi, le cofacteur correspondant, C_{12}, est

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1.(-9) = 9$$

Il s'avère que le mineur, M_{12}, et le cofacteur, C_{12}, sont de signes différents.

Le mineur $M_{22} = -26$. Son cofacteur correspondant, C_{22}, est

$$\mathrm{C}_{22} = (-1)^{2+2} \mathrm{M}_{22} = 1.(-26) = -26$$

Cette fois, le mineur, M_{22}, et le cofacteur, C_{22}, sont identiques.

Évaluer le déterminant d'une matrice 3×3 sera maintenant possible. Nous procéderons en réduisant celui-ci en une série de déterminants 2×2, pour lesquels le calcul est nettement plus facile. Ce processus est appelé **une expansion par cofacteurs**.

7- Expansion par cofacteurs - méthode de calcul des déterminants

Soit A une matrice carrée et C_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

- Choisir une rangée ou une colonne de A (si possible, il est plus rapide de choisir la rangée ou la colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros)…
- Multiplier chacun des éléments a_{ij} de la rangée (ou colonne) choisie par son cofacteur, C_{ij}, correspondant…
- Faire la somme de ces résultats.

8- Calcul du déterminant pour une matrice 3×3

Pour une matrice 3×3, cela voudrait dire qu'en choisissant de faire une expansion le long de la première rangée, le déterminant serait

$$det\ A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Si l'on avait choisi de faire une expansion le long de la deuxième colonne, alors il faudrait calculer

$$det\ A = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

Quoique le choix de rangée ou de colonne puisse différer, le résultat du déterminant sera le même quel que soit ce choix. Vérifions par un exemple.

Exemple

Quel est le déterminant de la matrice A?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Solution

Suivons le processus proposé plus haut (expansion par cofacteurs) :

- Choisir une rangée ou une colonne de A… Pour l'instant, choisissons la première rangée.
- Multiplier chacun des éléments de cette rangée par leurs cofacteurs correspondants… Les éléments de la première rangée sont $\mathrm{a11} = 2, \mathrm{a12} = 1, \mathrm{et}\ \mathrm{a13} = 3$ que l'on multiple avec les cofacteurs correspondants, c'est-à-dire $\mathrm{C}_{11}, \mathrm{C}_{12}$ et C_{13} qui sont

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1(0.(-2) - 2.0) = 0$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(1 \times (-2) - 2 \times 2) = 6$$

$$\mathrm{C}_{13} = (-1)^{1+3}\mathrm{M}_{13} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1(1 \times (0) - 2 \times 0) = 0$$

Finalement, il s'agit de faire le calcul

$$det\ A = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

$$det\ A = 2 \times 0 + 6 \times 1 + 3 \times 0 = 6$$

Vérifions si une expansion le long de la deuxième colonne appuierait le résultat précédent. Notez que le choix de la deuxième colonne est nettement la plus efficace puisque le déterminant sera obtenu du calcul

$$\boldsymbol{det\ A = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}}$$

et deux des trois éléments de la 2e colonne sont nuls. En effet, $a_{12} = 1, a_{22} = 0, et\ a_{32} = 0$. Il est ainsi inutile de calculer les cofacteurs C_{22} et C_{32}. Pour sa part, le cofacteur correspondant à a_{12} est

$$\mathrm{C}_{12} = (-1)^{1+2}\mathrm{M}_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(1 \times (-2) - 2 \times 2) = 6$$

Le déterminant de A est donc

$$\det \mathrm{A} = \mathrm{a}_{12}\mathrm{C}_{12} + \mathrm{a}_{22}\mathrm{C}_{22} + \mathrm{a}_{32}\mathrm{C}_{32} = 1 \times 6 + 0 \times \mathrm{C}_{22} + 0 \times \mathrm{C}_{32} = 6$$

ce qui correspond effectivement à la réponse obtenue par une expansion le long de la première rangée.

9- Méthode alternative pour calculer les déterminants

Cette seconde méthode est en tout point équivalente à l'expansion par cofacteurs mais vous permettra d'éviter l'utilisation des cofacteurs.

- Octroyer à chacun des éléments un signe $+/-$ en suivant la règle suivante : on associe un signe positif à la position a_{11} , puis on alterne les signes en se déplaçant horizontalement ou verticalement.
- Choisir une rangée ou une colonne de A (si possible, il est plus rapide de choisir la rangée ou la colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros)…
- Multiplier chacun des éléments a_{ij} de la rangée (ou colonne) choisie par son mineur correspondant, i.e. le déterminant qu'il reste lorsqu'on élimine la rangée et la colonne dans lesquelles se trouve a_{ij}.
- Faire la somme ou la différence de ces résultats selon le signe accordé aux éléments lors de la première étape.

Vérifions que cette méthode produira le même résultat que dans l'exemple précédent :

Exemple

Soit donc la matrice A à laquelle on octroie un signe $+/-$ selon la règle décrite plus tôt.

$$A = \begin{pmatrix} 2^+ & 1^- & 3^+ \\ 1^- & 0^+ & 2^- \\ 2^+ & 0^- & -2^+ \end{pmatrix}$$

- Choisissons la 3e colonne (ce n'est certes pas le meilleur choix puisque la 2e rangée possède plus d'éléments nuls mais…)
- Nous multiplions ensuite chaque élément par son mineur correspondant :

$$3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \times 0 = 0$$

$$2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) = -4$$

$$-2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \times (-1) = 2$$

- Finalement, les signes respectifs des éléments de la 3e colonne nous indiquent les opérations qui doivent être effectuées entres ces valeurs pour obtenir le déterminant :

$$\det A = \color{red}{+}\,0 \;\color{red}{-}\; (-4) \;\color{red}{+}\; 2 \;=\; 6$$

10- Exercice

Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c)\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad d)\begin{pmatrix} 8 & -1 & 9 \\ 3 & 1 & 8 \\ 11 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

Solutions : a) 24 b) -12 c) -66 d) 0

11- Déterminants de matrices carrées de dimensions 4x4 et plus

Les méthodes présentées dans le cas des matrices 3×3 demeurent valides pour toutes les dimensions supérieures. Il s'agit à nouveau de suivre les étapes d'une expansion par cofacteurs :

Soit A une matrice carrée et C_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

- Choisir une rangée ou une colonne de A (si possible, il est plus rapide de choisir la rangée ou la colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros)…
- Multiplier chacun des éléments a_{ij} de la rangée (ou colonne) choisie par son cofacteur, C_{ij}, correspondant…
- Faire la somme de ces résultats.

Il faut toutefois noter une distinction. Le cofacteur associé à l'élément a_{ij} d'une matrice 4×4 est le déterminant d'une matrice 3×3, puisqu'il est obtenu en éliminant une rangée (la i^e) et une colonne (la j^e) de A.

Exemple

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il devient essentiel, pour réduire le nombre de calculs, de choisir la rangée ou la colonne qui contient le plus grand nombre de zéros, en l'occurrence, la 4^e colonne. Nous procéderons donc à une expansion par cofacteurs le long de la 4^e colonne ce qui veut dire que

$$det\ A = a_{14}C_{14} + a_{24}C_{24} + a_{34}C_{34} + a_{44}C_{44}$$

Comme a_{14} et a_{44} sont nuls, il serait inutile de chercher à trouver C_{14} et C_{44}. Pour leur part, les cofacteurs C_{24} et C_{34} seront nécessaires…

$$C_{24} = (-1)^{2+4} M_{24} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$C_{34} = (-1)^{3+4} M_{34} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Nous vous laissons vérifier que $C_{24} = 18$ et $C_{34} = -2$. Par conséquent, le déterminant de A est

$$det\ A = a_{14}C_{14} + a_{24}C_{24} + a_{34}C_{34} + a_{44}C_{44}$$

$$det\ A = 0 \times C_{14} + 1 \times 18 + 1 \times (-2) + 0 \times C_{44} = 16$$

Exercice

Montrez que le déterminant de A dans l'exemple précédent est 16 en procédant par une expansion par cofacteurs le long de

a) la 1ère rangée
b) la 3^{e} colonne