



OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES

Sommaire

1. Optimisation entre des bornes.....	1
2. Exercice.....	4
3. Optimisation sous contrainte à variables multiples.....	5

Suite à une planification de la production, supposons qu'il a été déterminé que le niveau de production qui maximiserait les profits d'une compagnie est de 100,000 unités. Supposons également que ladite compagnie ne puisse surpasser une production de 75,000 unités en raison des contraintes de ressources, de main-d'œuvre, etc. Trouver le niveau de production optimal devra se faire en respectant les contraintes. La section présente traitera de ce problème.

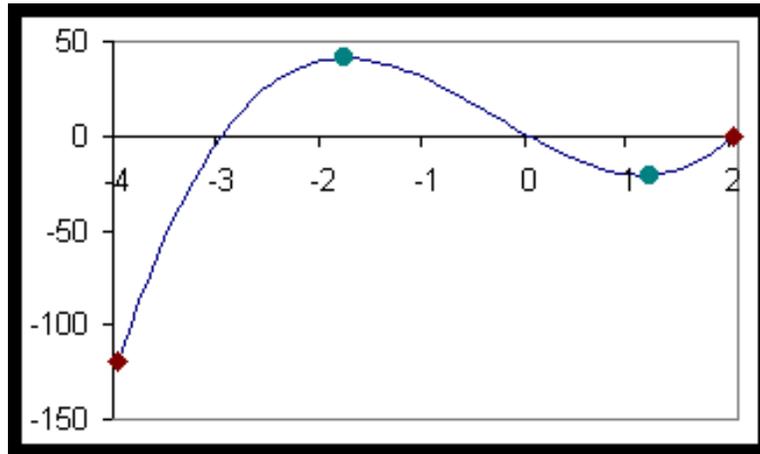
1. Optimisation entre des bornes

Théorème

Soit $f(x)$, une fonction continue définie sur un intervalle fermé $[a, b]$. Soient x_{min} , le point où f atteint son minimum absolu sur $[a, b]$, et x_{max} , le point où f atteint son maximum absolu sur $[a, b]$. Alors, x_{min} et x_{max} se trouveront toujours à l'un ou l'autre des points suivants :

- point stationnaire ;
- point critique ;
- point de borne.

Le graphique suivant illustre le sens du théorème. La fonction décrite est bornée par l'intervalle $[-4, 2]$. Elle possède deux optima locaux (*en vert*) : un maximum local en $x = -1,8$ ainsi qu'un minimum local en $x = 1,2$. Remarquez que le maximum local en $x = -1,8$ constitue également le maximum absolu, étant le point le plus haut de la fonction de f sur $[-4, 2]$. Toutefois, le minimum absolu de f sur $[-4, 2]$ ne se trouve pas en $x = 1,2$ mais plutôt au point de borne gauche, $x = -4$.



Le théorème restreint les optima possibles aux points stationnaires, critiques, et aux bornes. Contrairement au problème sans contraintes, il n'y a pas lieu de déterminer la nature de tous les points stationnaires et critiques. L'étude se limite à comparer la hauteur de la fonction en ces points à la hauteur de la fonction aux bornes. Il suffira d'identifier parmi ces valeurs celles qui sont optimales.

Méthodologie *Optimisation entre deux bornes* $[a, b]$

- Effectuer la dérivée première ;
- Trouver tous les points stationnaires et critiques de $[a, b]$;
- Évaluer $f(x)$ aux points stationnaires, critiques et aux bornes ;
- Identifier le minimum et le maximum absolu sur $[a, b]$.

Exemple

Trouver le minimum et le maximum absolus de la fonction

$$f(x) = x^3 - 12x + 9 \text{ sur l'intervalle } [0, 3].$$

- *Effectuer la dérivée première ;*

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

Trouver tous les points stationnaires et critiques de $[0, 3]$;

On retrouve les points stationnaires lorsque

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \\ 3(x^2 - 4) &= 0 \\ 3(x - 2)(x + 2) &= 0 \\ x &= \{-2, 2\}. \end{aligned}$$

Or, puisque les bornes nous contraignent à l'intervalle $[0, 3]$, seul le point stationnaire $x = 2$ est retenu. La fonction ne possède aucun point critique puisque la dérivée est définie en tout point de $[0, 3]$.

- *Évaluer la fonction f aux points stationnaires, critiques et aux bornes ;*

Point stationnaire $x = 2 : f(2) = -7$

Borne gauche $x = 0 : f(0) = 9$

Borne droite $x = 3 : f(3) = 0$

- *Identifier le minimum et le maximum absolus sur $[0, 3]$.*

Maximum absolu $f(0) = 9$

Minimum absolu $f(2) = -7$

2. Exercice

Une compagnie produit x vélos de course par année. La demande exige que la compagnie fabrique au moins 500 vélos par année. Cependant, le nombre d'unités produites annuellement ne peut excéder 1000.

- a. Le coût unitaire de leur production est modélisé par la fonction

$$C_{unit}(x) = \frac{200x - \frac{x^2}{9} + 180,000}{x}.$$

Combien de vélos doivent être produits par année pour minimiser le **coût unitaire** ?

- b. Le prix de vente unitaire dépend de la quantité vendue, x , selon la fonction

$$P_{unit}(x) = 700 - \frac{4x}{9}$$

Combien de vélos doivent être vendus par semaine pour maximiser le **revenu total** ?

- c. Combien de vélos doivent être vendus par semaine pour maximiser le **profit total (revenu total coût total)** ?

3. Optimisation sous contrainte à variables multiples

La fonction à optimiser peut souvent dépendre de plusieurs facteurs. Par exemple, les profits réalisés peuvent dépendre du coût des ressources, du nombre d'employés, du prix de vente. Comment optimiser, sous contrainte, une fonction à plusieurs variables ?

La difficulté réside dans le fait que nous sommes confrontés à plus d'une variable. La résolution d'un tel problème fait appel à la méthode dite de substitution, le résultat étant la réduction du nombre de variables.

Méthode de substitution

- Définir les différentes variables x_1, x_2, x_3, \dots ;
- Écrire l'objectif en fonction des variables ;
- Écrire toutes les contraintes ;
- Exprimer, en utilisant les contraintes, toutes les variables en termes d'une seule (par exemple $x_2 = f_1(x_1), x_3 = f_2(x_1), \dots$);
- Substituer ces expressions dans l'objectif ;
- Optimiser.

Exemple

La compagnie Kola produit et distribue de la boisson gazeuse. Les contenants (canettes) ont une forme cylindrique de hauteur h et de rayon r . Afin de réduire les coûts, Kola veut minimiser la surface d'aluminium nécessaire à la construction des contenants. Cependant, ils doivent s'assurer qu'un contenant ait un volume de $128\pi \text{ cm}^3$. Quels sont les dimensions du contenant qui réalisent l'objectif et satisfait la contrainte ?

- Définir les différentes variables x_1, x_2, x_3, \dots ;

r : rayon du cylindre ($r > 0$)

h : hauteur du cylindre ($h > 0$)

- Écrire l'objectif en fonction des variables ;

Objectif : minimiser la surface du contenant

$$\text{Min } S(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

- Écrire toutes les contraintes ;

Contrainte : volume = 128π

$$\pi r^2 h = 128\pi$$

- Exprimer, en utilisant les contraintes, toutes les variables en termes d'une seule (par exemple $x_2 = f_1(x_1), x_3 = f_2(x_1), \dots$);

De l'expression $\pi r^2 h = 128\pi$, la variable h est facilement isolée :

$$h = \frac{128\pi}{\pi r^2} \Rightarrow h = \frac{128}{r^2}$$

- Substituer ces expressions dans l'objectif ;

$$\begin{aligned} S(r, h) &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ S(r) &= 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{128}{r^2}\right) \\ S(r) &= 2\pi r^2 + \frac{256\pi}{r} \end{aligned}$$

- Optimiser.

Pour optimiser, nous avons recours aux méthodes apprises dans les rubriques précédentes :

$$S'(r) = \left(2\pi r^2 + \frac{256\pi}{r}\right)' \Rightarrow S'(r) = 4\pi r - \frac{256\pi}{r^2}$$

Un point stationnaire est obtenu lorsque $S'(r) = 0$:

$$\begin{aligned} 4\pi r - \frac{256\pi}{r^2} &= 0 \\ 4\pi r &= \frac{256\pi}{r^2} \\ r^3 &= \frac{256\pi}{4\pi} \\ r^3 &= 64 \Rightarrow r = 4 \end{aligned}$$

Il faut s'assurer qu'on retrouve bien un minimum en ce point :

$$S''(r) = \left(4\pi r - \frac{256\pi}{r^2}\right)' \Rightarrow S''(r) = 4\pi + \frac{512\pi}{r^3}$$

Pour $r > 0$, la dérivée seconde est toujours positive. La fonction S est donc toujours convexe, ce qui implique que le point stationnaire $r = 4$ constitue un minimum absolu. La valeur correspondante de h est obtenu de la relation

$$h = \frac{128}{r^2} = \frac{128}{4^2} = \frac{128}{16} = 8$$

La surface est minimisée lorsque $r = 4$ et $h = 8$.

La résolution par substitution demeure un moyen très efficace, même dans les problèmes ayant plus de deux variables.

Exemple

Avec exactement 2700 cm^2 de carton, nous désirons construire une boîte (largeur x , profondeur y , hauteur z) pouvant contenir un volume V . Nous exigeons que la largeur de la boîte soit le double de sa profondeur. Nous aimerions maximiser le volume que peut contenir cette boîte. Quelles valeurs de x, y, z réalisent notre objectif.

- Définir les différentes variables x_1, x_2, x_3, \dots ;

x : largeur de la boîte ($x > 0$)

y : profondeur de la boîte ($y > 0$)

z : hauteur de la boîte ($z > 0$)

- Écrire l'objectif en fonction des variables ;

Objectif : maximiser le volume de la boîte

$$\text{Max } V(x, y, z) = xyz$$

- Écrire toutes les contraintes ;

1. Surface du matériel disponible 2700 m^2

$$2xy + 2yz + 2zx = 2700$$

2. Dimensions exigées

$$x = 2y$$

- Exprimer, en utilisant les contraintes, toutes les variables en fonction d'une seule (par exemple $x_2 = f_1(x_1), x_3 = f_2(x_1), \dots$);

La variable x est exprimée en fonction de y dans la contrainte 2 : $x = 2y$

En substituant cette expression dans la contrainte 1, nous pourrions aussi exprimer z en fonction de y :

$$\begin{aligned} 2xy + 2yz + 2zx &= 2700 \\ \rightarrow 2(2y)y + 2yz + 2z(2y) &= 2700 \end{aligned}$$

- $4y^2 + 6zy = 2700$

$$\rightarrow z = \frac{2700 - 4y^2}{6y}$$

Substituer ces expressions dans l'objectif ;

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= xyz \\ V(y) &= 2y \cdot y \cdot \left(\frac{2700 - 4y^2}{6y} \right) \\ V(y) &= \frac{1}{3}y(2700 - 4y^2) \\ V(y) &= 900y - \frac{4}{3}y^3 \end{aligned}$$

- Optimiser.

Cherchons les points stationnaires :

$$V'(y) = \left(900y - \frac{4}{3}y^3 \right)' = 900 - 4y^2$$

Un point stationnaire est obtenu lorsque $V'(y) = 0$:

$$900 - 4y^2 = 0$$

$$(30 - 2y)(30 + 2y) = 0 \quad (\text{différence de carrés})$$

$$\Rightarrow y = \{-15, 15\}$$

Or, seule la valeur $y = 15$ est acceptable puisque les dimensions de la boîte doivent être positives. Il faut s'assurer qu'on retrouve bien un maximum en ce point :

$$V''(y) = (900 - 4y^2)' = -8y$$

Sur le domaine $y > 0$, la dérivée seconde est toujours négative. La fonction V est donc toujours concave, ce qui implique que le point stationnaire $y = 15$ constitue un maximum absolu. Les valeurs de x et de z correspondantes sont

$$\begin{aligned}x &= 2y = 2(15) = 30 \\z &= \frac{2700 - 4y^2}{6y} = \frac{2700 - 4(15)^2}{6(15)} = \frac{2700 - 900}{90} = 20\end{aligned}$$

Le volume de la boîte est donc maximisé lorsque ses dimensions sont $x = 30, y = 15, z = 20$.