# OPTIMISATION À UNE VARIABLE

## Sommaire



## 1. Optimum locaux d'une fonction

### 1.1. Maximum local

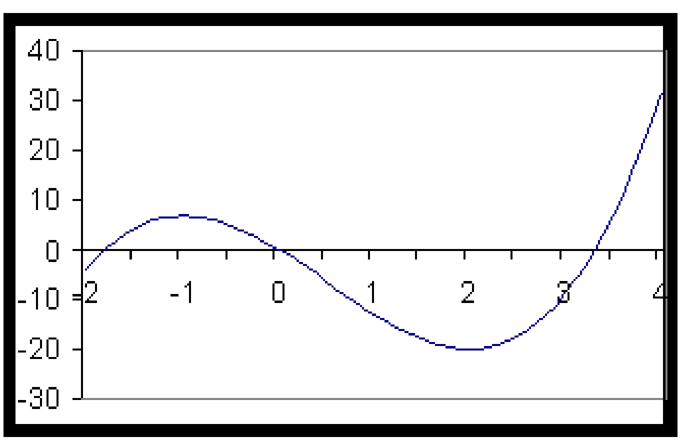
Soit $f\,(x)$ une fonction. Le point $x^*$ est appelé maximum local si et seulement s'il existe $I$, un intervalle ouvert contenant $x^*$, tel que $f\,(x^*) \geq f\,(x)$ pour tout $x$ dans $I$.

### 1.2. Minimum local

Soit $f\,(x)$ une fonction. Le point $x^*$ est appelé minimum local si et seulement s'il existe $I$, un intervalle ouvert contenant $x^*$, tel que $f\,(x^*) \leq f\,(x)$ pour tout $x$ dans $I$.

***Exemple***

Le graphique suivant présente une fonction qui possède un maximum local ainsi qu'un minimum local.



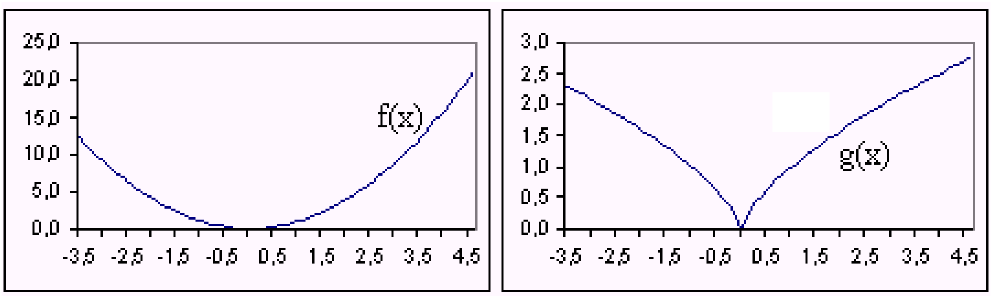
Au point $x = -1$ se trouve un maximum local puisqu'il existe un intervalle ouvert $I1$ contenant $x = -1$ sur lequel $f(-1) \geq f(x)$ pour tout $x$ dans $I1$.

Au point $x = 2$ se trouve un minimum local puisqu'il existe un intervalle ouvert $I2$ contenant $x = 2$ sur lequel $f(2) \leq f(x)$ pour tout $x$ dans $I2$.

### 1.3. Points stationnaires et points critiques

En économie, les stratégies de production d'une compagnie sont déterminées en fonction des objectifs recherchés par celle-ci. Parfois, on voudra minimiser les coûts ; à d'autres occasions, on voudra maximiser les profits. Quelle que soit la situation, on s’intéresse particulièrement à des valeurs optimales (maximales ou minimales)…

Considérons le graphe des fonctions suivantes, identifiées $f(x)$ et $g(x)$. Chacune possède un minimum local. Qu'y a-t-il de particulier en ces points ?




Il faut d'abord remarquer que les deux fonctions cessent de décroître et commencent à croître au point minimum (*x* = 0). Toutefois, cette transition ne se fait pas de la même manière pour l'une et l'autre. La fonction $f(x)$ effectue le passage de décroissance à croissance de façon progressive et, au point minimum, la pente est nulle. Dans le cas de $g(x)$, le passage de décroissance à croissance est abrupt, de sorte que la pente n'est pas définie en ce point. Ces deux types d'optima sont identifiés dans ce qui suit

**Définition : Point stationnaire**

Soit $f(x)$, une fonction continue et dérivable en $x = x^*$. Le point $x = x^*$ est appelé point stationnaire si la dérivée de $f$ s'annule en ce point, c'est-à-dire si $f'(x^*) = 0$.

***Exemple***

$f(x) = x2 + 2x - 1 \rightarrow f'(x) = 2x + 2$

La dérivée de $f$ s'annule lorsque

$2x + 2 = 0 \rightarrow 2x = -2 \rightarrow x = -1$

$x = -1$ est donc un point stationnaire de la fonction $f$ .

**Définition : Point critique**

Soit $f(x)$, une fonction qui est bien définie en $x = x^*$. Le point $x = x^*$ est appelé point critique si la dérivée de $f$ s'existe pas en ce point.

***Exemple***

$$f(x) = x^{2/3} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

La dérivée de $f$ n'existe pas lorsque $x = 0$ puisque le dénominateur prend alors la valeur 0. $x = 0$ est donc un point critique de $f$.

### 1.4. Recherche d'un optimum local

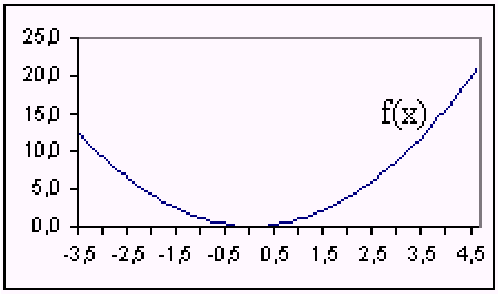
**Théorème**

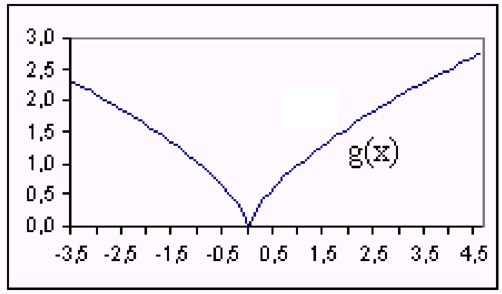
| |
|---|
| Soit $f$ une fonction de $x$ définie sur un intervalle ouvert $I$. Tout optimum local de $f$ est soit un point stationnaire, soit un point critique. |

Ce qu'affirme le théorème précédent est qu'il est inutile de chercher ailleurs qu'aux points stationnaires et aux points critiques lors de la recherche d'un optimum local. Faites attention toutefois ! Le théorème ne dit pas que tout point stationnaire ou critique est un optimum local… Une fois les points stationnaires et critiques découverts, il faut déterminer la nature de ces points, à savoir s'ils sont des minima, des maxima, ou encore ni l'un ni l'autre.

## Étude d'un point stationnaire ou critique par la dérivée première

Revoyons un exemple graphique présenté plus tôt. Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ possèdent toutes deux un minimum local en $x = 0$.




Le point $x = 0$ est un point stationnaire de la fonction $f(x)$. Cependant, $x = 0$ est un point critique de la fonction $g(x)$. Néanmoins, un phénomène commun se produit dans les deux cas : la dérivée change de signe au point minimum. L'étude de la dérivée première nous permet donc de déterminer la nature d'un point stationnaire ou critique.

### Règle de la dérivée première

Soit la fonction $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$ un point stationnaire ou critique de celle-ci.

$\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x}^*)$ est :

- un minimum local si la dérivée passe de négative à positive en $\boldsymbol{x}^*$.
- un maximum local si la dérivée passe de positive à négative en $\boldsymbol{x}^*$.

### Méthodologie : identification de tous les optima locaux d'une fonction $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

1. Effectuer la dérivée première de $f(x)$ ;
2. Trouver tous les points stationnaires et critiques ;
3. Dresser un tableau des variations pour étudier la dérivée autour des points stationnaires et critiques ;
4. Conclure.

***Exemple 1***

Trouver tous optima locaux de la fonction $f(x) = 2x3 - 3x2 - 12x + 4$.

1. **Effectuer la dérivée première de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ :**

   $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$

2. **Trouver tous les points stationnaires et critiques**

   Nous obtenons un point stationnaire lorsque $f\ '(x) = 0$.

   $6(x^2 - x - 2) = 0$

   $x^2 - x - 2 = 0$

   $(x + 1)(x - 2) = 0 \rightarrow x = -1, x = 2$

   Il existe donc deux points stationnaires ($x = -1$, $x = 2$). Il n'y a cependant aucun point critique puisque la dérivée est bien définie pour tout $x$.

3. **Dresser un tableau des variations pour étudier la dérivée autour des points stationnaires et critiques :**

   Un tableau des variations doit contenir

- tous les points stationnaires et critiques
- la valeur de la fonction aux points stationnaires et critiques
- les intervalles entre et autour des points stationnaires et critiques
- le signe de la dérivée dans ces intervalles

| | $\boldsymbol{x} < -\mathbf{1}$ | $\boldsymbol{x} = -\mathbf{1}$ | $-\mathbf{1} < x < 2$ | $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$ | $\boldsymbol{x} > 2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ | | 11 | | -16 | |
| $\boldsymbol{f}\ '(\boldsymbol{x})$ | + | 0 | - | 0 | + |
| | Croissance | **Max local** | Décroissance | **Min local** | Croissance |

**4. Conclure**

Au point $x = -1$, nous constatons que la dérivée passe de positive à négative. En vertu de la règle de la dérivée première, $f\ (-1) = 11$ est un maximum local. Au point $x = 2$, nous observons que la dérivée passe de négative à positive. Selon la règle de la dérivée première, $f\ (2) = -16$ est un minimum local.

***Exemple 2***

Trouver tous optima locaux de la fonction $f(x) = x^{\frac{1}{3}}.(x+1)$

1. **Effectuer la dérivée première de $f(x)$ :**

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)'.(x+1) + x^{\frac{1}{3}}.(x+1)' \quad \text{(dérivée d'un produit)}$$

$$= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.(x+1) + x^{\frac{1}{3}}.1$$

$$= \frac{x+1}{3x^{\frac{2}{3}}} + x^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{x+1}{3x^{\frac{2}{3}}} + \frac{x^{\frac{1}{3}}.3x^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}} \quad \text{(mise au dénominateur commun)}$$

$$= \frac{x+1+3x}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{1+4x}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

2. **Trouver tous les points stationnaires et critiques :**

Nous obtenons un point stationnaire lorsque $f\,'(x) = 0$.

Ceci est obtenu lorsque le numérateur est nul: $1 + 4x = 0$.

Donc, $x = -1/4 = -0{,}25$ est un point stationnaire.

Un point critique est obtenu lorsque $f\,'(x)$ n'est pas définie. Puisque le dénominateur est nul lorsque $\boldsymbol{x} = 0$, il s'agit d'un point critique.

3. **Dresser un tableau des variations pour étudier la dérivée autour des points stationnaires et critiques :**

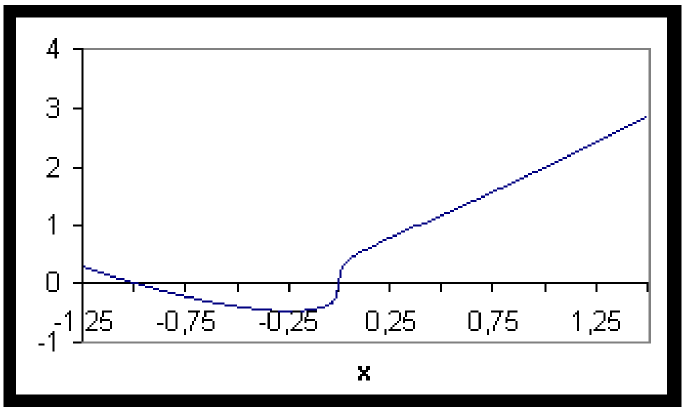
| | $x < -1/4$ | $x = -1/4$ | $-1/4 < x < 0$ | $X = 0$ | $x > 0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | -0,4725 | | 0 | |
| $f\,'(x)$ | - | 0 | + | non définie | + |
| | Décroissance | **Min local** | Croissance | **Ni min ni max** | Croissance |

**Conclure :**

Au point $x = -1/4$, nous constatons que la dérivée passe de négative à positive. En vertu de la règle de la dérivée première, $f\,(-1/4) = -0{,}4725$ est un minimum local.

Au point $x = 0$, la dérivée ne subit aucun changement de signe. Ce point critique n'est alors ni un minimum ni un maximum local.

Voici la représentation graphique de $f(x) = x^{\frac{1}{3}}.(x+1)$ :




Observez le changement de direction abrupt en $\boldsymbol{x} = 0$ (pt critique) sans pour autant que la fonction cesse de croître (*ni min ni max*).

**Exercice**

Pour les fonctions suivantes, trouver tous les points stationnaires et critiques, dresser un tableau des variations et déterminer où se trouvent les minima et maxima locaux. À l'aide d'Excel, tracer le graphe de chaque fonction afin de confirmer vos résultats.

a. $e^{x^3-3x}$
b. $\ln\,(x^2+1)$
c. $\frac{x}{x^2+1}$