RÉSOLUTION DE SYSTÈMES À DEUX INCONNUES

Sommaire

La rubrique d'aide qui suit s'attardera aux problèmes de résolution de systèmes de deux équations linéaires et deux variables. Les méthodes présentées seront essentielles dans le cadre des cours d'Analyse microéconomique, Économie managériale, ainsi que tous les cours de programmation linéaire et de recherche opérationnelle.

Solution d'un système d'équations

Soit le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

La solution d'un système est l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les variables x et y de sorte que les deux équations sont satisfaites simultanément.

Exemple

$x = 1, y = 2$ est une solution du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} = 8 \\ \quad 3y - 1 = 1 \end{cases}$$

En effet, lorsque les variables x et y sont substituées par 1 et 2 respectivement, les deux équations sont satisfaites, c'est-à-dire

$2(1) + 3(2) = 2 + 6 = 8$;

$3(1) - (2) = 3 - 2 = 1.$

Il serait fau***x*** de dire que $x = 4$, $y = 0$ est également une solution du système.

$2(4) + 3(0) = 8 + 0 = 8$;

$3(4) - (0) = 12 \neq 1$.

Quoique la première équation du système soit satisfaite, la seconde ne l'est pas. Rappelons que, par définition, la solution d'un système doit satisfaire simultanément les deu***x*** équations. Pour la même raison, les valeurs $x = 3, y = 8$, qui rendent vraie la seconde équation mais non la première, ne serait pas une solution.

Note

Il est important de mentionner qu'une solution est composée de deu***x*** valeurs, l'une étant celle de la variable x et l'autre, de y. Nous éviterons de dire que $x = 1$ est une solution et que $y = 2$ en est une autre. Une solution est composée de l'ensemble des valeurs conjointement prises par les variables pour satisfaire les équations du système.

1- Méthodes de résolution

Essentiellement, il existe 2 méthodes distinctes pour résoudre des systèmes de deux équations à deu***x*** inconnues. Quelle que soit celle que vous choisirez d'employer, sachez que la solution trouvée sera la même. Il s'agit donc pour vous de déterminer laquelle des méthodes que nous proposons vous préférez et de vous en servir religieusement!

1.1. Méthode de Substitution

Le problème de résoudre un système tel que

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

provient du fait que deu***x*** variables sont présentes dans chacune des équations. La méthode de substitution vous permettra d'utiliser l'information contenue dans une des deu***x*** équations pour réduire la seconde à une seule variable. Il s'agit de suivre les étapes suivantes :

1. Dans la première équation, isoler x. Il est normal que vous n'obteniez pas une valeur précise tout de suite. Vous devriez plutôt avoir une expression dans laquelle x dépend de y ;
2. Substituer x dans la seconde équation par l'expression trouvée à l'étape précédente. Normalement, vous devriez obtenir une expression n'ayant que la variable y ;
3. Résoudre pour y ;
4. Trouver x en utilisant l'expression trouvée en 1) et la valeur de y maintenant découverte.

Sachez que ces étapes ne sont pas absolues. Il sera parfois plus simple d'isoler y dans la seconde équation, et de remplacer l'expression obtenue dans la première…

Exemple

Résoudre le système à deux inconnues

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$$

Solution

1. Isoler x dans la première équation…

   $x = 5 - 3y$

2. Substituer x dans la seconde équation par $5 - 3y$ …

   $2(5 - 3y) + 5y = 9$

3. Résoudre pour y…

   $10 - 6y + 5y = 9$

   $-y = 9 - 10$

   $y = 1$

4. Trouver x…

   En 1), nous avons découvert que $x = 5 - 3y$ et nous savons maintenant que $y = 1$.

   $x = 5 - 3(1)$

   $x = 5 - 3$

   $x = 2$

La solution du système

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$$

est donc $x = 2,\ y = 1$.

Exemple

Résoudre le système à deu***x*** variables

$$\begin{cases} 4\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 7 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$$

Solution

Comme nous le mentionnions plus tôt, les étapes de résolution ne sont pas absolues. Par exemple, dans le cas présent, isoler x de la première équation produira des fractions (il faudra éventuellement diviser par 4 pour se défaire du coefficient de x). Il serait nettement plus simple d'isoler y de la première équation puisque le coefficient (caché) de celui-ci est 1.

1. Isoler y dans la première équation…

   $y = 7 - 4x$

2. Substituer y dans la seconde équation par $7 - 4x$ …

   $2x + 3(7 - 4x) = 11$

3. Résoudre pour y…

   $2x + 21 - 12x = 11$

   $-10x + 21 = 11$

   $-10x = -10$

   $x = 1$

4. Trouver y…

   En 1), nous avons découvert que $y = 7 - 4x$ et nous savons maintenant que $x = 1$.

   $y = 7 - 4(1)$

   $y = 5 - 4$

   $y = 3$

La solution du système

$$\begin{cases} 4\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 7 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$$

est donc $x = 1, y = 3$.

Notez que la méthode de comparaison pourrait s'avérer difficile à utiliser si aucune des variables n'est facilement isolable en raison de leurs coefficients. Par exemple, le système

$$\begin{cases} 7x - 4y = 11 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases}$$

créera des fractions quelle que soit la variable que l'on isolera en première étape. Pour ces cas, nous suggérons plutôt la méthode suivante.

1.2. Méthode des combinaisons linéaires

Considérons le système à deux équations et deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} 6\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 12 \\ -6x + 3y = 8 \end{cases}$$

La méthode de substitution ici ferait apparaître des fractions qui seraient à la fois superflues et difficile à manipuler. Nous pouvons constater que le coefficient de x est 6 dans les deux équations. Ne serait-il pas agréable d'additionner le $6x$ de la première équation au $-6x$ de la deuxième pour qu'ils s'annulent ? En fait, nous pouvons le faire… en suivant certaines règles. En effet, effectuer des combinaisons linéaires de deux équations consiste à additionner (ou soustraire) TOUTE une équation à une autre et non seulement quelques termes spécifiques. Par exemple, dans le cas présenté ci-dessus, effectuer l'addition des deux équations produirait

$$6x + 2y = 12$$

$$-6x + 3y = 8$$

$$5y = 20$$

duquel nous tirons $y = 4$. Par la suite, substituer y par 4 dans l'une ou l'autre des équations de départ permettra d'obtenir la valeur de x.

Comme la substitution, vous remarquerez que la méthode des combinaisons linéaires transforme un système à deux variables en une équation à une seule inconnue. Il s'agira pour vous de suivre les consignes suivantes :

1. Multiplier une des équations (ou les deux, si nécessaire) de sorte que la variable x ait des coefficients opposés ;
2. Effectuer l'addition des nouvelles équations. La variable x devrait s'annuler ;
3. Résoudre pour y à l'aide de l'expression obtenue en 2) ;
4. Substituer y par la valeur obtenue en 3) dans l'une ou l'autre des équations de départ.

Exemple

Résoudre le système à deux variables

$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x = 4y = -5 \end{cases}$$

Solution

1. En multipliant la première équation par 3 et la seconde par -2, les coefficients de x seront opposés (6 et -6, respectivement) ;

$$3\,(2x - 3y = 8) \rightarrow 6x - 9y = 24$$

$$-2\,(3x + 4y = -5) \rightarrow -6x - 8y = 10$$

2. Effectuer l'addition des nouvelles équations obtenues à l'étape précédente…

$6x - 9y = 24$

$-6x - 8y = 10$

$-17y = 34$

3. Résoudre pour y…

$-17y = 34$

$y = -2$

4. Substituer la valeur de y dans l'une ou l'autre des équations de départ…

De la première équation, nous avons que

$2x - 3y = 8$

$2x - 3(-2) = 8$

$$2x + 6 = 8$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

La solution du système est donc $x = 1, y = -2$.

Il peut s'avérer plus simple de multiplier les équations de sorte que les coefficients de y s'annulent. Les étapes à suivre dans ce cas seraient tout à fait équivalents à ceux que nous venons de démontrer.

Exemple

Résoudre le système à deux variables

$$\begin{cases} 7x - 2y = 8 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$$

Solution

Noter ici que les coefficients de y ont déjà des signes opposés. Il suffirait de multiplier la première équation par 2 pour que les y puissent s'annuler lors de l'addition des équations. Il ne sera même pas nécessaire, dans ce cas de multiplier la seconde équation.

1. En multipliant la première équation par 2, les coefficients de y seront opposés (4 et -4, respectivement) ;

$$2\,(\,7x - 2y = 8\,) \rightarrow 4x - 4y = 16$$

$$3x + 4y = 18 \rightarrow 3x + 4y = 18$$

2. Effectuer l'addition des nouvelles équations obtenues à l'étape précédente…

$$14x - 4y = 16$$

$$3x + 4y = 18$$

$$17x = 34$$

3. Résoudre pour x…

   $17x = 34$

   $x = 2$

4. Substituer la valeur de x dans l'une ou l'autre des équations de départ…

   De la première équation, nous avons que

   $7x - 2y = 8$

   $7(2) - 2y = 8$

   $14 - 2y = 8$

   $-2y = 8 - 14$

   $-2y = -6$

   $y = 3$

La solution du système est donc $x = 2, y = 3$.

L'avantage de la méthode des combinaisons linéaires est qu'elle s'adapte facilement aux cas plus complexes.

Exemple

Résoudre le système

$$\begin{cases} 1{,}25\,\boldsymbol{x} + 3{,}25\,\boldsymbol{y} = 15{,}50 \\ 1{,}5\,x + 2{,}75y = 14 \end{cases}$$

Solution

Afin d'obtenir des coefficients de x opposés, il suffit de multiplier la première équation par 1,5 et la seconde par -1,25. Les x puissent s'annuleront lors de l'addition des équations.

1. $1{,}5\,(\,1{,}25\,x + 3{,}25\,y = 15{,}50\,) \rightarrow 1{,}875\,x + 4{,}875\,y = 23{,}25$

   $-1{,}25\,(\,1{,}5\,x + 2{,}75\,y = 14\,) \rightarrow -1{,}875\,x - 3{,}4375\,y = -17{,}50$

2. Effectuer l'addition des nouvelles équations obtenues à l'étape précédente…

$1{,}875\,x\ +\ 4{,}875\,y\ =\ 23{,}25$

$-1{,}875\,x\ -\ 3{,}4375\,y\ =\ -17{,}50$

$1{,}4375y = 5{,}75$

3. Résoudre pour y…

$$1{,}4375\,y =\ 5{,}75$$

$$y\ = \frac{5{,}75}{1{,}4375}$$

$$y = 4$$

4. Substituer la valeur de y dans l'une ou l'autre des équations de départ…

De la première équation, nous avons que

$$1{,}25\,x\ +\ 3{,}25\,y\ =\ 15{,}50$$

$$1{,}25\,x\ +\ 3{,}25\,(4)\ =\ 15{,}50$$

$$1{,}25\,x\ +\ 13\ =\ 15{,}50$$

$$1{,}25\,x\ =\ 2{,}50$$

$$x\ = \frac{2{,}50}{1{,}25}$$

$$x\ =\ 2$$

La solution du système est donc $x\ =\ 2, y\ =\ 4$.

Il faut, pour les cas comme celui-ci, être extrêmement prudent lors des calculs ; une calculatrice peut être très utile. Cependant, la méthode de résolution elle-même n'est en aucun point modifiée.

Exercices

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x - 7y = 15 \\ 3x = 5y = -7 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 4x + 3y = 29 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 5x - 3y = -21 \end{cases}$

Solutions

1. $x = 2, y = -1$
2. $x = 1, y = -2$
3. $x = 5, y = 3$
4. $x = -3, y = 2$