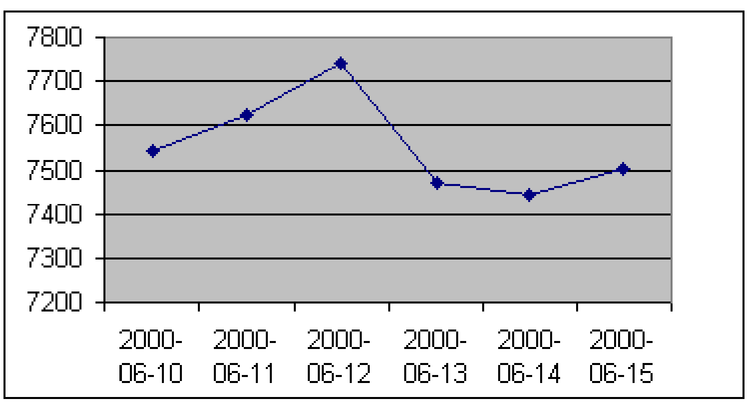
SUITES ET SÉRIES GÉOMÉTRIQUES

Sommaire

Lors d'un placement, la valeur d'un investissement peut varier en fonction du temps. L'étude d'un placement à différentes dates produit une suite de valeurs. L'indice de la bourse, par exemple, représente lui-même une suite aléatoire. Vous avez sûrement déjà observé une courbe de tendance boursière telle que celle-ci :



Cette courbe n'est en fait qu'une visualisation de la suite chronologique :

10-juin	7542
11-juin	7623
12-juin	7743
13-juin	7471
14-juin	7443
15-juin	7501

La rubrique actuelle traitera donc de l'étude des suites et des séries. Plus particulièrement, nous étudierons les suites et séries géométriques puisque celles-ci font l'objet de la plupart des contrats bancaires (placements, emprunts, hypothèques).

1. Suites géométriques

Définition : Une suite $\{\mathrm{a_n}\}_{\mathrm{n=0}}^{\infty} = \{\mathrm{a_0, a_1, a_2, a_3}, \dots\}$est un ensemble ordonné de nombres. L'indice de chaque terme de la suite indique la position ou l'ordre dans lequel se trouve une donnée spécifique. Cet ordre importe énormément. Par exemple, la suite $\{1,3,5,7,9, \dots\}$ diffère de la suite $\{9,7,5,3,1, \dots .\}$, même si les termes semblent les mêmes.

Définition : Une suite $\{\mathrm{a_n}\}_{\mathrm{n=0}}^{\infty} = \{\mathrm{a_0, a_1, a_2, a_3}, \dots\}$est dite géométrique de raison r si ses termes satisfont à la formule de récurrence :

$$a_n = r\, a_{n-1}$$

Exemple 1

La suite $\{1,2,4,8,16, \dots\}$ est une suite géométrique de raison 2 puisque chaque terme est obtenu du précédent en le multipliant par 2.
La suite $\{9,3,1,1/3, \dots\}$ est une suite géométrique de raison $1/3$.

Forme standard
En général, nous exprimons plutôt le terme a_n d'une suite géométrique en fonction de r et du terme initial $a_0$par la formule

$$a_n = a_0 r^n$$

Exemple 2

Les actions d'une compagnie sont initialement émises au prix de 10 \$. À toutes les années, la valeur d'une action s'accroît de 25 %.
Montrer que la valeur d'une action produit une suite géométrique.
Calculer la valeur de l'action dix ans après son émission.
Tracer la courbe des variations de la valeur de l'action sur une période de 10 ans après son émission.

Solution
Chaque année, une action s'accroît de 25 % de sa valeur, ainsi

$$a_n = a_{n-1} + 0{,}25a_{n-1} = 1{,}25a_{n-1}$$

Cette expression satisfait à la forme de récurrence d'une suite géométrique de raison 1,25.
La valeur initiale de l'action est $a_0 = 10$. Après 10 années complètes, l'action vaut

$$a_{10} = a_0 r^{10} = 10(1{,}25)^{10} = 10 \times 9{,}313 = 93{,}13s$$

À l'aide d'Excel, nous pouvons dresser le tableau des valeurs de l'action à chaque fin d'année.

Arial 12 G I S

B4 = =10*(1,25)^A4

	A	B	C
1	Année	Valeur	
2	0	10,00	
3	1	12,50	
4	2	15,63	
5	3	19,53	
6	4	24,41	
7	5	30,52	
8	6	38,15	
9	7	47,68	
10	8	59,60	
11	9	74,51	
12	10	93,13	

La valeur de l'action, au terme de chaque année, est donc décrit par la suite géométrique $\{10, 10.33, 15.63, \ldots\}$.

L'exemple que nous venons de présenter décrivait une suite géométrique croissante. Or, la suite $\{16, 8, 4, 2, 1, 1/2, \ldots\}$ est une suite géométrique décroissante de raison ½.

Une suite géométrique est :

- **croissante** si et seulement si $r > 1$
- **décroissante** si et seulement si $0 < r < 1$

Exemple 3

Les réserves de pétrole en Alberta diminuent de 10 % à chaque année.
Sachant que 100 000 Ml constituaient les réserves initiales, montrer que les réserves de pétrole décrivent une suite géométrique décroissante et en trouver la raison.
Quel volume reste-t-il quatre années plus tard?
Tracer le diagramme des variations sur une période de 20 ans.

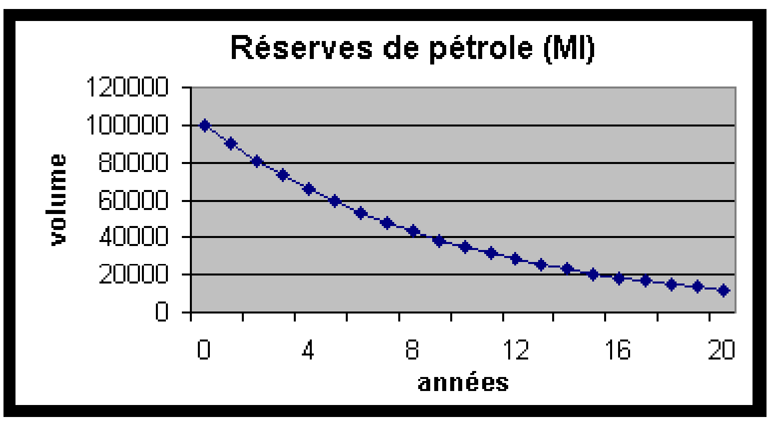
Solution
Chaque année, le volume diminue de 10 % par rapport à l'année précédente :

$$a_n = a_{n-1} - 0{,}10a_{n-1} = 0{,}90a_{n-1}$$

Cette relation satisfait à la forme de récurrence d'une suite géométrique de raison 0,90. De plus, la suite est décroissante puisque la $0 < r < 1$. Le volume initial de pétrole est $a_0 = 100\ 000$. Après 4 années complètes, les réserves de pétrole s'établissent à

$$a_4 = a_0r^4 = 100\ 000(0{,}90)^4 = 100\ 000 \times 0{,}6561 = 65610$$

Il reste donc 65 610 Ml de pétrole dans les réserves après quatre années.



La formule de récurrence permet aussi d'obtenir la valeur d'un élément d'une suite sans connaître a_0 mais plutôt un élément quelconque a_k En effet, tout terme a_n d'une suite géométrique de raison r est obtenu du terme a_k par la relation $a_n = r^{n-k}a_k$.

Exemple 4

La fortune personnelle de Gill Bates double à chaque année. Si la valeur de sa fortune était estimée à 32 000 000 $ en 2000, à combien était-elle en 1995? À la fin de quelle année la fortune dépassera-t-elle le milliard (1 000 000 000 $)?

Solution

Chaque année, le montant de la fortune double par rapport à l'année précédente $\mathrm{a_n} = 2\mathrm{a_{n-1}}$. Il s'agit d'une suite géométrique de raison $\mathrm{r} = 2$. La valeur initiale de la fortune est inconnue mais cette information importe peu grâce à la relation $\mathrm{a_n} = \mathrm{r^{n-k}a_k}$:

$$\mathrm{a_{1995}} = 2^{1995-2000}\mathrm{a_{2000}} = 2^{-5}.32\,000\,000$$
$$\mathrm{a_{1995}} = \frac{1}{2^5}.32\,000\,000 = \frac{1}{32}.32\,000\,000$$
$$\mathrm{a_{1995}} = 1\,000\,000$$

Pour obtenir la date à partir de laquelle le milliard sera atteint, il faut trouver le n tel que $a_n = 1\,000\,000\,000$.

$$\mathrm{a_n} = 2^{\mathrm{n}-2000}\mathrm{a_{2000}}$$
$$1\,000\,000\,000 = 2^{\mathrm{n}-2000}\mathrm{a_{2000}}$$
$$2^{\mathrm{n}-2000} = \frac{1000}{32}$$

Nous sommes en présence d'une équation pour laquelle la variable à résoudre est en exposant (voir équations exponentielles). Il nous faut faire usage des logarithmes afin de résoudre cette équation.

$$2^{\mathrm{n}-2000} = \frac{1000}{32} \rightarrow \ln(2^{\mathrm{n}-2000}) = \ln\left(\frac{1000}{32}\right)$$
$$\rightarrow (\mathrm{n}-2000)\ln 2 = \ln\left(\frac{1000}{32}\right)$$
$$\rightarrow (\mathrm{n}-2000) = \frac{\ln\left(\frac{1000}{32}\right)}{\ln 2}$$
$$\rightarrow \mathrm{n} = 2000 + \frac{\ln\left(\frac{1000}{32}\right)}{\ln 2}$$
$$\rightarrow \mathrm{n} = 2000 + 4{,}966 = 2004{,}966$$

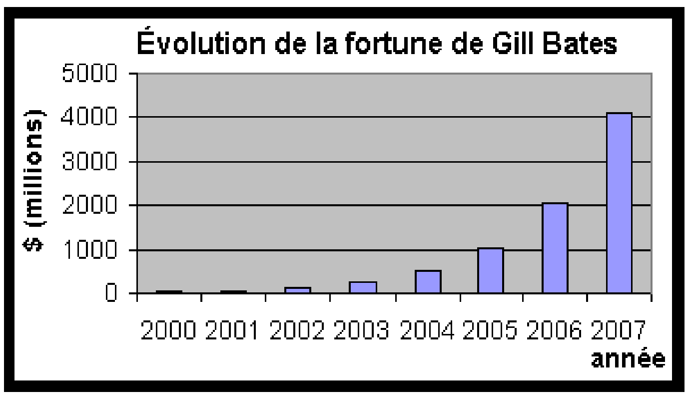
Le milliard sera donc atteint à la fin de l'année 2005.

Il serait plus rapide dans le cas actuel de créer un tableau itératif dans Excel permettant d'observer l'évolution temporelle de la fortune de Gill Bates. La formule de récurrence $\mathrm{a_n} = 2\mathrm{a_{n-1}}$ est d'ailleurs facilement programmée :

Arial 12 G I S

B7 = =B6*2

	A	B	C
1	Année	Fortune	
2	2000	32000000	
3	2001	64000000	
4	2002	128000000	
5	2003	256000000	
6	2004	512000000	
7	2005	1024000000	
8	2006	2048000000	
9	2007	4096000000	



2. Exercice

À chaque année, la demande mondiale annuelle en figues augmente de 5 %.

a) Montrer que la demande en figues peut être représentée par une suite géométrique.
b) Si la demande en figues était de 2,3 tonnes en 1997, quelle sera la demande en 2003? (rep : 3,08 tonnes)
c) En quelle année la demande a-t-elle dépassée 1 tonne pour la première fois? (rep : 1980)
d) En quelle année la demande dépassera-t-elle 10 tonnes ? (rep : 2028)
e) À l'aide d'Excel, créer un tableau décrivant l'évolution temporelle de la demande en figues et en tracer le graphe sous forme d'histogramme.

3. Application des suites géométriques aux mathématiques financières

Une application très répandue des suites géométriques se retrouve dans les transactions bancaires (emprunts, placements). Par exemple, un individu dépose un montant de 1 000 $ à la banque. La banque offre à cet individu une appréciation annuelle de 6 % de son placement, c'est-à-dire que la somme versée sera augmentée d'un intérêt de 6 % à la fin de chaque année. Si l'individu ne touche pas les intérêts au fur et à mesure, l'évolution annuelle du placement sera donnée dans le tableau suivant :

temps écoulé	**dépôt**	**intérêt**	**solde**
-	1000$	0	$a_0 = 1000\$$
1 an	0	$0{,}06(1000) = 60\$$	$a_1 = 1060\$$
2 ans	0	$0{,}06(1060) = 63{,}60\$$	$a_2 = 1123{,}60\$$
3 ans	0	$0{,}06(1123{,}60) = 67{,}42\$$	$a_3 = 1191{,}02\$$
4 ans	0	$0{,}06(1191{,}02) = 71{,}46\$$	$a_4 = 1262{,}48\$$

L'évolution temporelle du placement n'est ni plus ni moins qu'une suite géométrique. En effet, puisque $\mathrm{a_n} = \mathrm{a_{n-1}} + 0{,}06\mathrm{a_{n-1}} = 1{,}06\mathrm{a_{n-1}}$, la suite des valeurs accumulées du placement est géométrique de raison 1,06.

4. Vocabulaire

- Dates d'intérêt : dates où les intérêts sont versés;
- Période d'intérêt : intervalle de temps entre deux dates d'intérêt;
- Capitalisation : Le fait d'ajouter les intérêts au capital;
- Taux périodique (i) : taux d'intérêt réel par période d'intérêt;
- Taux nominal (j) : Ce taux, calculé sur une base annuelle, ne sert qu'à déterminer le taux périodique. C'est généralement ce taux qui est affiché. Il devrait toujours être accompagné d'une précision sur le type de capitalisation. Soit

  $m =$ nombre de périodes d'intérêt dans l'année
  $d =$ durée de la période en fraction d'année
  $j =$ taux nominal

  Alors le taux périodique est donné par $i = j/m = d \times j$. Par exemple, un taux de "8 % capitalisé semestriellement" signifie que la période d'intérêt est le semestre ($m = 2$ ou $d = 1/2$) et que le taux périodique (semestriel) est $i = 8\%/2 = 4\%$. Le taux nominal ne correspond pas au taux annuel réel, sauf si la capitalisation est annuelle;
- Taux effectif : taux d'intérêt annuel réel;

De manière générale, si V_0 désigne le montant initial placé au taux d'intérêt périodique "i", alors la valeur acquise par le placement après n périodes d'intérêt, V_n, si on laisse les intérêts se capitaliser, est décrite par la relation

$$V_n = V_0(1+i)^n$$

La suite des valeurs acquises $\{ V_0 , V_1 , V_2 , \dots \}$ est géométrique de raison $1 + i$.

Exemple

Un étudiant emprunte un montant de 2 500 $. La banque prête cet argent au taux de 9 %, capitalisation mensuelle. Quel montant l'étudiant devra-t-il rembourser deux ans plus tard.

Solution

Lorsque le taux est annoncé de cette façon, il s'agit du taux nominal. La capitalisation étant mensuelle, la période d'intérêt est le mois et le nombre de période dans l'année est $\mathrm{m} = 12$. Le taux périodique est alors $\mathrm{i} = 0{,}09 / 12 = 0{,}0075$ par mois. L'étudiant doit rembourser le prêt dans deux ans, soit $n = 24$ périodes d'intérêt plus tard. Le montant du remboursement sera

$$\mathrm{V}_{24} = \mathrm{V}_0(1+\mathrm{i})^{24}$$
$$\mathrm{V}_{24} = 2500(1+0{,}0075)^{24}$$
$$\mathrm{V}_{24} = 2500 * 1{,}1964 = 2991{,}03$$

5. Exercices :

Problème 1

Un investisseur place un montant de 15 000 $ à la banque. Celle-ci offre un taux d'intérêt $i = 4{,}1\ \%$ par année.

a) Quel est la valeur du placement 4 ans plus tard? (rep : 17615,47$)
b) Combien de temps faut-il pour que le montant double? (rep : 18 ans)

Problème 2

Une personne souhaite s'acheter une motocyclette dont la valeur est de 12 000 $. Afin d'accumuler cette somme, elle place un montant V_0 à la banque, qu'elle laisse fructifier pendant 5 ans au taux d'intérêt de 5 %, capitalisation semestrielle. Trouver V_0. (rep : 9 374,38 $)

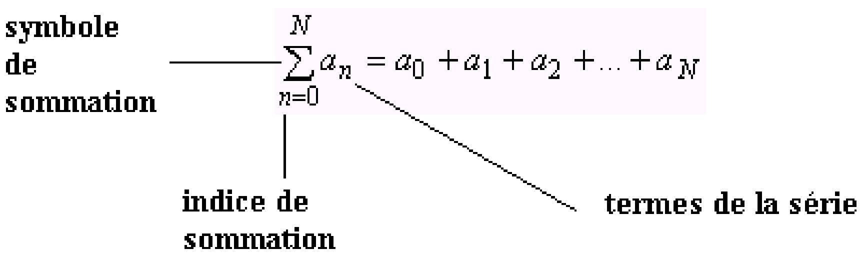
Problème 3

Le prix d'un litre de lait en 1990 était de 0,95 $. En 2000, le prix du lait était fixé à 1,42 $. Quel a été le taux d'inflation annuel i sur cette période? (rep : 4,1 %)

6. Séries géométriques

Soit $\{a_n,\} = \{a_0, a_1 r, a_2 r^2, \ldots\}$, une suite géométrique de raison r. Une série géométrique est la somme des éléments d'une suite géométrique $a_0 + a_1 r + a_2 r^2 +$..

Une série peut être finie (possède un nombre fini de termes) ou infinie. Afin de réduire l'écriture d'une série, nous avons recours au symbole de sommation (voir rubrique :Le symbole de sommation) :



.

Dans le cas d'une série géométrique, les termes de la somme sont ceux d'une suite géométrique, c'est-à-dire $a_n = \; a_0 r^n$. Ainsi, une série géométrique de raison r possède la forme suivante

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{N} a_0 r^n = \; a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + \cdots + a_0 r^N$$

Exemple

Écrire en utilisant le symbole de sommation $1 \; + \; 2 \; + \; 4 \; + \; 8 \; + \; \ldots \; + \; 128$

Solution

Les termes de la somme sont ceux de la suite géométrique$\{1\,,2\,,4\,,8\,,\ldots,128\,\}$
Le terme initial de la suite est $a_0 = 1$ et sa raison est $r = 2$ (puisque chaque terme est le double du précédent). Tous les termes peuvent être représentés par la relation

$$\mathrm{a_n = \; a_0 r^n \rightarrow a_n = \; 1 * 2^n = 2^n}$$

Le premier terme (1) de la série est obtenu lorsque l'exposant de 2 est $n = 0$ et le dernier terme (128), lorsque l'exposant de 2 est $n = 7$. Les bornes de sommation sont donc 0 et 7.

Ainsi, la série géométrique peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_{\mathrm{n}=0}^{7} 2^{\mathrm{n}} = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 128$$

Formule pour évaluer une série géométrique finie :

Soit $\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{a}_0 \mathrm{r}^{\mathrm{n}} = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_0\mathrm{r} + \mathrm{a}_0\mathrm{r}^2 + \cdots + \mathrm{a}_0\mathrm{r}^{\mathrm{N}}$, une série géométrique finie de raison r et de valeur initiale a_0. Alors

$$\sum_{n=0}^{N} a_0 r^n = a_0 \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$$

Exemple 1

Évaluer la série géométrique $\sum_{\mathrm{n}=0}^{4} 4(\frac{1}{2})^{\mathrm{n}}$

Solution

Il suffit d'utiliser la formule de la somme d'une série géométrique :

$$\sum_{\mathrm{n}=0}^{4} 4(\frac{1}{2})^{\mathrm{n}} = 4\frac{1 - (\frac{1}{2})^{4+1}}{1 - (\frac{1}{2})} = 4\frac{1 - \frac{1}{32}}{1 - (\frac{1}{2})} = 4\frac{\frac{31}{32}}{\frac{1}{2}} = 4 * \frac{31}{32} * \frac{2}{1} = 7{,}75$$

Vous pouvez évidemment vérifier que cette réponse est correcte en additionnant les termes de la série géométrique $\sum_{\mathrm{n}=0}^{4} 4(\frac{1}{2})^{\mathrm{n}} = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 7{,}75$

Exemple 2

Calculer la somme de la série $9 + (-3) + 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(-\frac{1}{243}\right)$

Solution

Il s'agit ici d'une série géométrique de raison $r = -1/3$ et dont le terme initial est $a_0 = 9$. Il faut aussi identifier la borne supérieure de sommation (l'exposant de r du dernier terme). Le dernier terme, identifié par a_N est $-1/243$:

$$\begin{aligned} a_N = a_0 r^N &\Rightarrow -\frac{1}{243} = 9\left(-\frac{1}{3}\right)^N \\ &\Rightarrow -\frac{1}{9.243} = \left(-\frac{1}{3}\right)^N \\ &\Rightarrow -\frac{1}{3^2.3^5} = \left(-\frac{1}{3}\right)^N \\ &\Rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^7 = \left(-\frac{1}{3}\right)^N \\ &\Rightarrow N = 7 \end{aligned}$$

Nous pouvons donc représenter la série en notation "sigma" et calculer la somme à l'aide de la formule vue précédemment :

$$\sum_{n=0}^{7} 9\left(\frac{-1}{3}\right)^n = 9\,\frac{1-\left(\frac{-1}{3}\right)^{7+1}}{1-\left(\frac{-1}{3}\right)} = 9\,\frac{1-\frac{1}{6561}}{\frac{4}{3}} = 9 * \frac{6560}{6561} * \frac{3}{4} = 6{,}74897119$$

7. Exercices

Problème 1 :
Évaluer les séries géométriques suivantes :

$$\sum_{i=0}^{6} 4\left(\frac{2}{3}\right)^i$$

$$\sum_{k=0}^{10} 2{,}5\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^k$$

$$\sum_{n=0}^{5} \frac{1}{2}\left(\frac{-3}{2}\right)^n$$

Problème 2 :
Évaluer les séries géométriques suivantes :

a) $4 + 1 + 1/4 + 1/16 + \ldots + 1/4096$

b) $(-1/3) + 1 + (-3) + 9 + \ldots + 729$

c) $6 + 3/2 + 3/8 + 3/32 + \ldots + 3/512$

8. Application des séries géométriques aux mathématiques financières

Une personne décide de placer dans un compte épargne un montant V_0 , le dernier jour de chaque mois pendant une année complète. Le premier versement est effectué le 31 janvier et le dernier, le 31 décembre. La banque où les versements sont effectués offre un taux d'intérêt mensuel i pour ce type de compte. Quel montant la personne aura-t-elle accumulé dans son compte à la fin de l'année, immédiatement après avoir effectué le dernier versement le 31 décembre?

Ce genre de problème, où on doit considérer un certain nombre de versements égaux effectués à intervalles réguliers, peut se résoudre à l'aide des séries géométriques.

Au lieu d'effectuer les 12 versements mensuels dans un même compte, on pourrait ouvrir 12 comptes différents, en autant que le taux d'intérêt soit le même dans chacun d'eux. Il s'agirait de placer un montant V_0 dans le premier compte le 31 janvier, un montant V_0 dans le deuxième compte le 31 février et ainsi de suite jusqu'au 12ième versement. On accumulerait le même montant d'argent que si on avait effectué les 12 versements dans le même compte, à la fin de l'année.

Le calcul du montant accumulé au 31 décembre se fera donc par la somme des valeurs acquises (ou cumulées) individuellement par chaque versement. Notons que même si les versements sont égaux, ils ne se capitalisent pas tous sur une même durée. Par exemple, le versement du 31 janvier se capitalise sur 11 mois complets alors que celui du 31 décembre ne porte aucun intérêt.

Comme nous l'avons démontré à la section précédente, la valeur d'un versement après n périodes de capitalisation au taux i est obtenue de la relation $V_n = V_0(1+i)^n$.

Date du versement	**Valeur initiale du versement**	**Nb de mois de capitalisation jusqu'au 31 décembre**	**Valeur acquise du versement le 31 décembre**
31 janvier	$\boldsymbol{V_0}$	11	$V_0(1+i)^{11}$
28 février	$\boldsymbol{V_0}$	10	$V_0(1+i)^{10}$
31 mars	$\boldsymbol{V_0}$	9	$V_0(1+i)^{9}$
30 avril	$\boldsymbol{V_0}$	8	$V_0(1+i)^{8}$
31 mai	$\boldsymbol{V_0}$	7	$V_0(1+i)^{7}$
30 juin	$\boldsymbol{V_0}$	6	$V_0(1+i)^{6}$
31 juillet	$\boldsymbol{V_0}$	5	$V_0(1+i)^{5}$
31 août	$\boldsymbol{V_0}$	4	$V_0(1+i)^{4}$
30 septembre	$\boldsymbol{V_0}$	3	$V_0(1+i)^{3}$
31 octobre	$\boldsymbol{V_0}$	2	$V_0(1+i)^{2}$
30 novembre	$\boldsymbol{V_0}$	1	$V_0(1+i)^{1}$
31 décembre	$\boldsymbol{V_0}$	0	$V_0(1+i)^{0}$

La montant total disponible dans le compte d'épargne de la personne est la somme des valeurs acquises (cumulées) de chaque versement :

$$M = V_0(1+i)^0 + V_0(1+i)^1 + V_0(1+i)^2 + \cdots + V_0(1+i)^{11} = \sum_{n=0}^{11} V_0(1+i)^n$$

Vous aurez reconnu la forme d'une série géométrique de raison $1+$. En appliquant la formule générale

$$\sum_{n=0}^{N} a_0 r^n = a_0 \frac{1-r^{N+1}}{1-r}$$

on obtient :

$$M = \sum_{n=0}^{11} V_0(1+i)^n = V_0\left[\frac{1-(1+i)^{11+1}}{1-(1+i)}\right] = V_0\left[\frac{1-(1+\ )^{12}}{-i}\right] = V_0\left[\frac{(1+i)^{12}-1}{i}\right]$$

Remarque :
En mathématiques financières on dénote généralement la valeur de chaque versement par "PMT" et le nombre de versements par "n". Immédiatement après le dernier versement, la valeur acquise (FV) par une suite de n versements égaux effectués à intervalles réguliers au taux d'intérêt périodique "i", est donnée par la fomule :

$\mathrm{FV} = \mathrm{PMT} s_{n\urcorner i}$ avec $s_{n\urcorner i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

La période d'intérêt considérée pour le taux "" doit correspondre à la période entre deux versements consécutifs.