THÉORIE DES ENSEMBLES

Sommaire

1. Les ensembles

Un ***ensemble*** est une collection bien définie d'objets qu'on nomme ***éléments***.

Exemple

- Soit Ω, l'ensemble de tous les résultats obtenus en faisant la somme de 2 dés :

$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$;

Les valeurs $2, 3, 4, \ldots, 12$ sont les éléments de l'ensemble

Les ensembles des nombres employés le plus fréquemment et auxquels il est bon d'accorder une attention particulière sont les suivants :

- Ensemble des nombres naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$;
- Ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$;
- Ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ (tous les nombres pouvant s'écrire sous forme de fraction) ;
- Ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ (formé des tous les nombres rationnels et irrationnels)**.**

Par convention, l'emploi des symboles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ **et** $\mathbb{R}$ se restreindra ces ensembles.

1.1. L'ensemble vide

On dénote par $\emptyset$ l'ensemble vide, celui composé d'aucun élément.

1.2. Élément d'un ensemble

Le symbole $\in$ indique qu'un élément appartient à un ensemble. À l'inverse, le symbole $\notin$ identifie un élément qui n'appartient pas à un ensemble.

Exemple

- $a \in \{a, e, i, o, u, y\}$
- $j \notin \{a, e, i, o, u, y\}$
- $2 \in \mathbb{N}$
- $0{,}5 \notin \mathbb{N}$

1.3. Les sous-ensembles

L'ensemble $\boldsymbol{A}$ est dit un ***sous-ensemble*** de $\boldsymbol{B}$ si et seulement si tous les éléments de $\boldsymbol{A}$ sont aussi des éléments de $\boldsymbol{B}$. On dit alors que l'ensemble $\boldsymbol{A}$ est ***inclus*** dans l'ensemble $\boldsymbol{B}$. La notation $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ est employée pour symboliser l'inclusion de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{B}$.

Le symbole $\not\subset$ indique pour sa part qu'un ensemble n'est pas inclus dans un autre. $\boldsymbol{C} \not\subset \boldsymbol{D}$ exprime donc qu'au moins un élément de $\boldsymbol{C}$ n'est pas un élément de $\boldsymbol{D}$.

Exemple

Soit Ω, l'ensemble des nombres possibles d'obtenir de la somme de deux dés

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Voici quelques sous-ensembles de Ω:

$\boldsymbol{A}$ = ensemble des résultats pairs = $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$;

$\boldsymbol{B}$ = ensemble des résultats inférieurs ou égaux à 6 = $\{2, 3, 4, 5, 6\}$;

$\boldsymbol{C}$ = ensemble des résultats supérieurs à 12 = $\{\emptyset\}$;

$\boldsymbol{D}$ = ensemble des résultats divisibles par 11 = $\{11\}$.

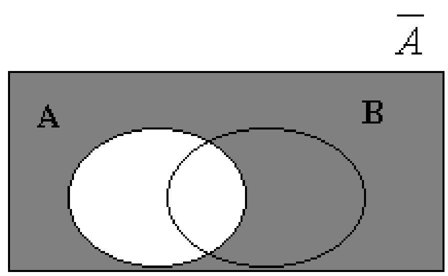
Exemple

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$
- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$
- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \not\subset \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

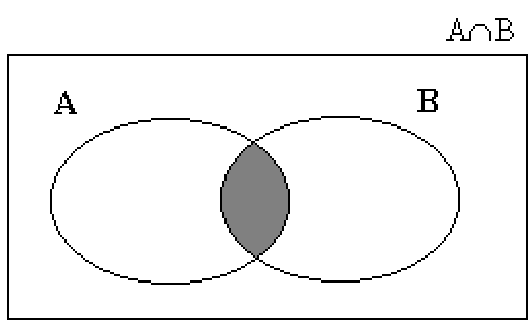
1.4. Opérations sur les ensembles

Il nous faudra parfois effectuer des opérations sur les ensembles. Par exemple, nous voudrons peut-être trouver des éléments communs à plusieurs ensembles ou ceux qui appartiennent à un seul de ces ensembles. La section suivante vous présente les opérations ensemblistes les plus importantes, ainsi que leur notation symbolique.

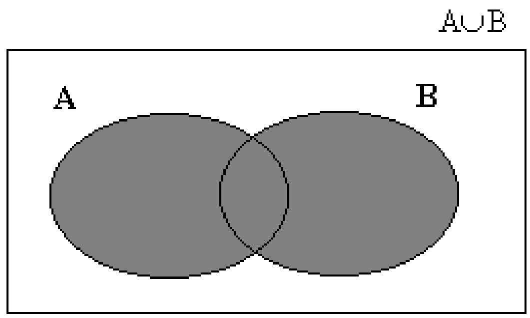
***Complément de** $\boldsymbol{A}$* $(\overline{\boldsymbol{A}})$: l'ensemble de tous les éléments qui ne sont pas dans $\boldsymbol{A}$.



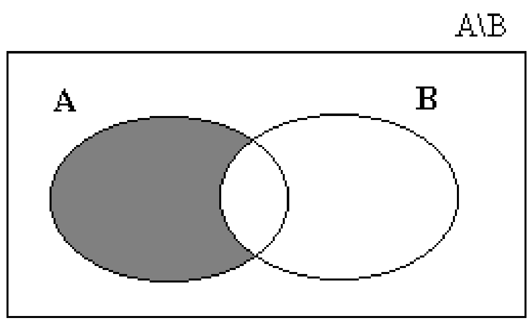
Intersection de deux ensembles ($\boldsymbol{A \cap B}$ **:** ensemble de tous les éléments appartenant à la fois à $\boldsymbol{A}$ ***et*** à $\boldsymbol{B}$.



Union de deux ensembles ($\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ **:** ensemble de tous les éléments appartenant à l'un, à l'autre, ou encore aux deux ensembles $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$.



Différence de deux ensembles ($A \setminus B$) : l'ensemble de tous les éléments de $\boldsymbol{A}$ qui n'appartiennent pas à $\boldsymbol{B}$.



Exercice récapitulatif

Considérons l'ensemble Ω, l'ensemble de tous les résultats qui peuvent être obtenus en faisant la somme de deux dés.

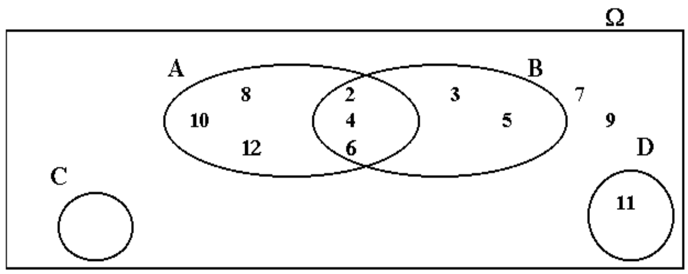
Soient les sous-ensembles de Ω:

$\boldsymbol{A}$ = les résultats pairs

$\boldsymbol{B}$ = les résultats ≤ 6

$\boldsymbol{C}$ = les résultats >12

$\boldsymbol{D}$ = les résultats divisibles par 11



Écrire les éléments des sous-ensembles obtenus par les opérations suivantes :

Les ensembles complémentaires

$\bar{A} = les\ résultats\ impairs$
$\bar{B} = les\ résultats > 6$
$\bar{C} = les\ résultats\ \leq 12$
$\bar{D}$ =les résultats non divisibles par 11

solutions

a. $\{3, 5, 7, 9, 11\}$
b. $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
c. $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
d. $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$

Intersection

$A \cap B : les\ résultats\ pairs\ et\ \leq 6$
$A \cap D : les\ résultats\ pairs\ et > 12$
$B \cap B : les\ résultats \leq 6\ et \leq 6$
$B \cap C : les\ résultats \leq 6\ et > 12$
$\Omega \cap D : tous\ les\ résultats\ et\ divisibles\ par\ 11$

solutions

a. $\{2,4,6\}$
b. $\emptyset$
c. $\{2,3,4,5,6\}$
d. $\emptyset$
e. $\{11\}$

Union

$A \cup B$: $les\ résultats\ pairs\ ou \leq 6$
$A \cup D$: $les\ résultats\ pairs\ ou\ divisibles\ par\ 11$
$B \cup C$: $les\ résultats \leq 6\ ou > 12$

note : les éléments appartenant à la fois à $\boldsymbol{A}$ et à $\boldsymbol{B}$ ne sont inscrit qu'une seule fois dans le nouveau sous-ensemble.

solutions

a. $\{2,3,4,5,6,8,10,12\}$
b. $\{2,4,6,8,10,11,12\}$
c. $\{2,3,4,5,6\}$

Différence

$A \setminus B$: $résultats\ pairs\ sauf\ ceux \leq 6$
$\Omega \setminus A$: $tous\ les\ résultats\ sauf\ ceux\ qui\ sont\ pairs$
$A \setminus A$: $résultats\ pairs\ sauf\ ceux\ qui\ sont\ pairs$
$A \setminus \emptyset$: $résultats\ pairs\ sauf\ l'ensemble\ vide$

solutions

a. $\{8,10,12\}$
b. $\{3,5,7,9,11\}$
c. $\emptyset$
d. $\{2,4,6,8,10,12\}$