TRACER LE GRAPHE D'UNE FONCTION

Sommaire

En combinant les concepts de dérivée première et seconde, il est maintenant possible de tracer le graphe d'une fonction avec une précision surprenante : la dérivée première représente la pente d'une fonction et permet de déterminer la croissance ou la décroissance de celle-ci ; les points stationnaires et critiques permettent d'obtenir des minima et des maxima locaux (sinon absolus) ; la dérivée seconde décrit la courbure de la fonction.

Il est primordial de ne pas confondre les caractéristiques dévoilées par les fonctions f, f', f''.

$$f(x) \rightarrow hauteur\ de\ la\ fonction\ au\ point\ x\ (positive, négative)$$
$$f'(x) \rightarrow pente\ de\ la\ fonction\ au\ point\ x\ (croissante, décroissante)$$
$$f''^{(x)} \rightarrow courbure\ de\ la\ fonction\ au\ point\ x\ (concave, convexe)$$

Nous vous suggérons la méthodologie suivante afin de tracer vous-mêmes le graphe d'une fonction.

1. Méthodologie : comment tracer le graphe d'une fonction

- Effectuer la dérivée première ;
- Trouver tous les points stationnaires et critiques ;
- Effectuer la dérivée seconde ;
- Trouver tous les points où la dérivée seconde s'annule ;
- Créer un tableau des variations en identifiant :

1. La valeur de la fonction aux points stationnaires, critiques et à ceux pour lesquels la dérivée seconde s'annule ;
2. Tous les intervalles entre et autour des points énumérés en 1 ;

3. La croissance/décroissance entre les points stationnaires et critiques ;
4. La concavité/convexité entre les points où la seconde dérivée s'annule ou n'existe pas;
5. Les minima et maxima locaux.

- Utiliser le tableau afin de tracer le graphe.

Nous faisons appel à deux exemples déjà faits dans les sections précédentes pour illustrer le processus :

Exemple 1

Tracer le graphe de la fonction $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$.

1. *Effectuer la dérivée première de $f(x)$* ***;***

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6x - 12 \\ &= 6(x^2 - x - 2) \end{aligned}$$

2. *Trouver tous les points stationnaires et critiques ;*

   Nous obtenons un point stationnaire lorsque $f'(x) = 0$.

$$\begin{gathered} 6(x^2 - x - 2) = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \\ (x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = \{-1, 2\} \end{gathered}$$

   Il existe donc deux points stationnaires ($x = \{-1, 2\}$). Il n'y a cependant aucun point critique puisque la dérivée est bien définie pour tout x.

3. *Effectuer la dérivée seconde de la fonction $f(x)$;*

$$\begin{aligned} f''(x) &= (6x^2 - 6x - 12)' \\ &= 12x - 6 \end{aligned}$$

4. *Trouver tous les points où la dérivée seconde s'annule ou n'existe pas ;*

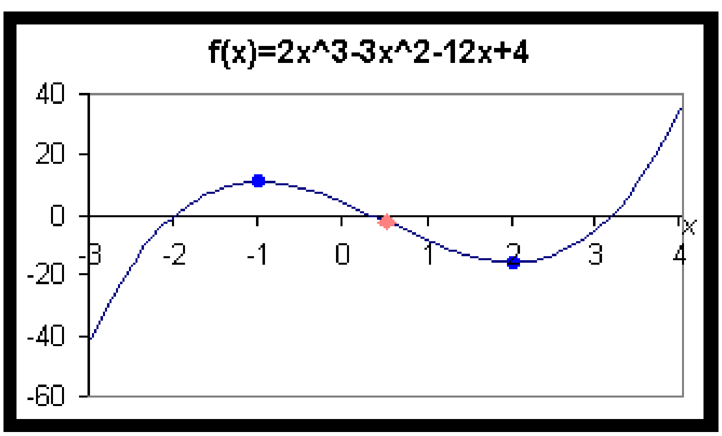
   La dérivée seconde s'annule lorsque

$$\begin{aligned} 12x - 6 &= 0 \\ 12x &= 6 \Longrightarrow x = {}^{1}/_{2} \end{aligned}$$

Créer un tableau des variations en identifiant :

1. *La valeur de la fonction aux points stationnaires, critiques et à ceux pour lesquels la dérivée seconde s'annule ou n'existe pas ;*
2. *Tous les intervalles entre et autour des points énumérés en 1 ;*
3. *La croissance/décroissance entre les points stationnaires et critiques*
4. *La concavité/convexité entre les points où la seconde dérivée s'annule ou n'existe pas;*
5. *Les minima et maxima locaux.*

x	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,{}^{1}/_{2}[$	$1/2$	$]1/2,2[$	2	$]2,\infty[$
$f(x)$		11		- 2,5		-16	
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
ou ▯ ∪ **ou** ∩	∩	Pt stat. ∩ **Max**	↓ ∩	↓ **change** **de** **courbure**	↓ ∪	Pt.stat . ∪ **Min**	∪



Exemple

Trouver tous optima locaux de la fonction $f(x) = x^{1/3} \cdot (x+1)$

1. *Effectuer la dérivée première de* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ***;***

$$f'(x) = \left(x^{1/3}\right)' \cdot (x+1) + x^{1/3} \cdot (x+1)' \qquad (dérivée\ d'un\ produit)$$
$$= \frac{1}{3}x^{-2/3} \cdot (x+1) + x^{1/3} \cdot 1$$
$$= \frac{x+1}{3x^{2/3}} + x^{1/3}$$
$$= \frac{x+1}{3x^{2/3}} + \frac{x^{1/3} \cdot 3x^{2/3}}{3x^{2/3}} \qquad (mise\ au\ dénominateur\ commun)$$
$$= \frac{x+1+3x}{3x^{2/3}}$$
$$= \frac{1+4x}{3x^{2/3}}$$

2. *Trouver tous les points stationnaires et critiques ;*

   Nous obtenons un point stationnaire lorsque $f'(x) = 0$.

   Ceci est obtenu lorsque le numérateur est nul : $1 + 4x = 0$.

   Donc, $x = -1/4 = -0{,}25$ est un point stationnaire.

   Un point critique est obtenu lorsque $f'(x)$ n'est pas définie. Puisque le dénominateur est nul lorsque $x = 0$, il s'agit d'un point critique.

3. *Effectuer la dérivée seconde ;*

$$f'(x) = \frac{(1+4x)' \cdot \left(3x^{2/3}\right) - (1+4x) \cdot \left(3x^{2/3}\right)'}{\left(3x^{2/3}\right)^2} \qquad (dérivée\ d'un\ quotient)$$
$$= \frac{4 \cdot 3x^{2/3} - (1+4x) \cdot 2x^{-1/3}}{9x^{4/3}}$$
$$= \frac{1}{9x^{4/3}} \cdot \left(12x^{2/3} - \frac{2 \cdot (1+4x)}{x^{1/3}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{9x^{4/3}} \cdot \left(\frac{x^{1/3} \cdot 12x^{2/3}}{x^{1/3}} - \frac{2 \cdot (1+4x)}{x^{1/3}} \right) \qquad (mise\ au\ même\ dénominateur) \\
&= \frac{1}{9x^{4/3}} \cdot \left(\frac{12x - (2+8x)}{x^{1/3}} \right) \\
&= \frac{4x-2}{9x^{5/3}}
\end{aligned}
$$

4. *Trouver tous les points où la dérivée seconde s'annule ou n'existe pas ;*

   La dérivée s'annule lorsque le dénominateur est zéro :

   $$4x - 2 = 0 \rightarrow x = 1/2$$

   La dérivée seconde n'existe pas lorsque le dénominateur est nul

   $$9x^{5/3} = 0 \rightarrow x = 0$$

   Ce point avait déjà été identifié comme étant un point critique. Attention, le signe de la dérivée seconde changera en ce point puisque les exposants sont impairs.

Créer un tableau des variations en identifiant :

1. *La valeur de la fonction aux points stationnaires, critiques et à ceux pour lesquels la dérivée seconde s'annule ou n'existe pas ;*
2. *Tous les intervalles entre et autour des points énumérés en 1 ;*
3. *La croissance/décroissance entre les points stationnaires et critiques ;*
4. *La concavité/convexité entre les points où la seconde dérivée s'annule ou n'existe pas;*
5. *Les minima et maxima locaux.*

x	**x□□ 1/4**	**□ 1/4**	**]□ 1/4 ,0[**	**0**	**]0,1/2[**	**1/2**	**] 1/2, ∞ [**
$f(x)$		- 0,4725		0		1,1906	
$f'(x)$	-	0	+	Non défini	+	0	+
$f''(x)$	+	+	+	Non défini	-	0	+
ou □ **□ ou □**	↓ ∪	***Pt stat.*** ∪ **Min**	∪	**change de courbure**	∩	**change de courbure**	∪