

LES DROITES ET LES PENTES

Sommaire

1. Composantes de l'équation d'une droite	1
2. Comment obtenir l'équation d'une droite	2
3. Application à la microéconomie	3
3.1. Courbe de la demande	3
3.2. Problèmes d'élasticité	7
4. Exercices	9

Notions requises aux cours : Analyse micro-économique, Économie managériale.

Une **droite** est une fonction qui peut être écrite sous la forme $y = mx + b$

Particularité : Graphiquement, une droite est une fonction dont l'inclinaison est constante en tout point.

1. Composantes de l'équation d'une droite

La **pen**te, qui est représentée par la lettre **m**, mesure l'inclinaison de la droite. Elle correspond à la variation de la valeur de y lorsque x augmente d'une unité. Graphiquement, elle exprime la variation verticale de la droite pour un déplacement horizontal d'une unité positive.

Si la droite passe par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , la pente est obtenue par la relation

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

L'ordonnée à l'origine, qui est représentée par la lettre **b**, est la valeur de y lorsque x est zéro. Il s'agit donc de la position de la droite lorsque celle-ci croise l'axe des y .

Exemple

L'équation $y = 3x - 4$ représente une droite dont la pente est 3 ($m = 3$) et dont l'ordonnée à l'origine est -4 ($b = -4$).

Notez bien que les variables x et y sont tout à fait arbitraires. Elles pourraient tout aussi bien être nommées q et p , comme c'est le cas dans les courbes d'offre et de demande. Il est seulement important de déterminer laquelle des variables constitue la variable indépendante (que l'on place sur l'axe horizontal) et laquelle constitue la variable dépendante (que l'on place sur l'axe verticale).

2. Comment obtenir l'équation d'une droite

En plusieurs occasions, il nous faudra trouver l'équation d'une droite à partir de certaines informations. Par exemple, quelle est l'équation de la droite qui passe les points (1,4) et (2,8)? Afin de répondre à cette question, il faut trouver les valeurs de m et de b qui caractérisent la droite.

1. Déterminer la pente

Par définition, la pente est mesurée par la relation

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pente de la droite passant par les points (1,4) et (2,8) serait

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 4}{2 - 1} = 4$$

ce qui indique que pour déplacement d'une unité vers la droite, il y a un déplacement de 4 unités vers le haut. Notez également que le choix du "premier" et du "deuxième" point n'affectera pas le calcul de la pente :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 8}{1 - 2} = 4$$

2. Trouver l'ordonnée à l'origine

Afin de trouver la valeur de b , il s'agit d'utiliser un point connu de la droite et la pente qui vient d'être déterminée :

Nous venons de trouver que $m = 4$. L'équation de notre droite actuelle est $y = mx + b = 4x + b$. Nous savons de plus que le point (1,4) se trouve sur cette droite et doit donc satisfaire son équation :

$$4 = 4(1) + b \rightarrow 4 = 4 + b \rightarrow b = 0$$

Encore une fois, le choix du point que l'on utilise n'affecte en rien le résultat obtenu. Aurions-nous choisi le point (2,8), le calcul aurait révélé :

$$8 = 4(2) + b \rightarrow 8 = 8 + b \rightarrow b = 0$$

La pente et l'ordonnée à l'origine étant maintenant connues, l'équation de la droite est $y = 4x + 0$ ou $y = 4x$.

3. Application à la microéconomie

3.1. Courbe de la demande :

Exemple 1

Faisons l'hypothèse que la courbe de demande est décrite par une droite de forme $q = mp + b$. Trouvez son équation étant données les informations suivantes : un promoteur découvre que la demande en billets de théâtre est de 1200 lorsque le prix est de 60\$ mais chute à 900 lorsque le prix est haussé à 75\$.

Solution :

La forme de l'équation $q = mp + b$ indique que p , le prix, est la variable indépendante (comme x), et q , la quantité, est la variable dépendante (comme y). L'énoncé du problème nous permet de déduire deux points contenus sur la droite de demande : les points (60\$, 1200) et (75\$, 900). Il s'agit donc à nouveau d'identifier la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite.

Pente :

$$m = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} = \frac{900 - 1200}{75 - 60} = \frac{-300}{15} = -20$$

Ainsi l'équation de la droite doit prendre la forme $q = -20p + b$. Il ne reste qu'à trouver l'ordonnée à l'origine à l'aide d'un des deux points.

Ordonnée à l'origine :

Puisque (60\$, 1200) est un point de la droite de demande, il doit faire en sorte que l'équation $q = -20p + b$ soit satisfaite. En substituant, nous obtenons

$$1200 = -20(60) + b$$

$$1200 = -1200 + b$$

$$b = 2400$$

Par conséquent, puisque $m = -20$ et $b = 2400$, l'équation de la droite de demande est

$$q = -20p + 2400$$

Il est intéressant de noter qu'une fois cette droite trouvée, nous pouvons évaluer quelle serait la quantité demandée quel que soit le prix. Par exemple, la quantité demandée lorsque le prix est de 40\$ serait obtenue en calculant la variable q :

$$q = -20(40) + 2400$$

$$q = -800 + 2400$$

$$q = 1600$$

Nous pourrions également obtenir le prix qu'il faudrait fixer pour que la quantité demandée soit de 1000 billets.

$$1000 = -20p + 2400$$

$$20p = 2400 - 1000$$

$$20p = 1400$$

$$p = 70 \$$$

Exemple 2

La quantité et le prix d'équilibre d'un bien sont déterminés par l'intersection des courbes de l'offre et de la demande. Pour un produit donné, l'offre est déterminée par la droite

$$q_{offre} = 30p - 45$$

et la demande, pour ce même produit, par la droite

$$q_{demande} = -15p + 855.$$

Déterminer le prix et la quantité d'équilibre et tracer, sur un même graphique, les courbes de l'offre et de la demande.

Solution :

Il faut ici déterminer les coordonnées du point (q, p) qui se situe à l'intersection des deux droites. Ce point doit donc satisfaire à la fois l'équation de l'offre et celle de la demande. La solution du problème consiste à résoudre :

$$\begin{aligned} q &= 30p - 45 \\ q &= -15p + 855 \end{aligned}$$

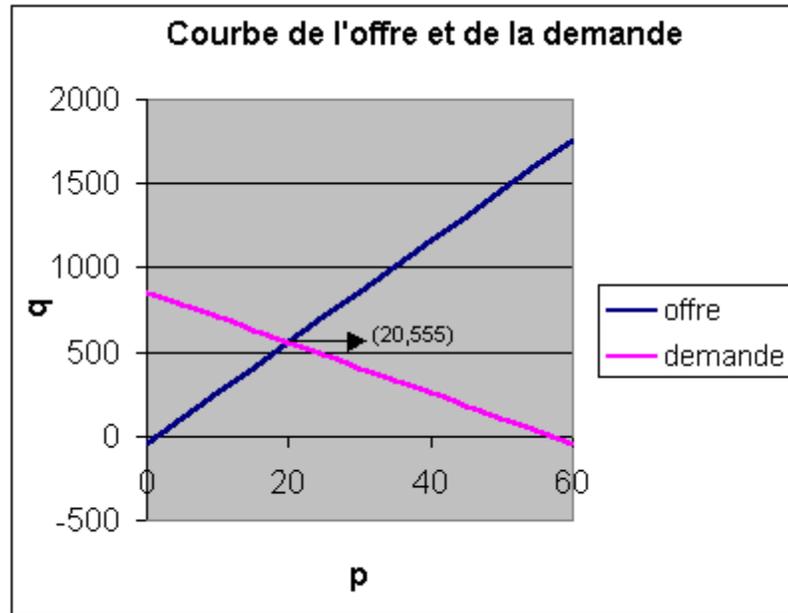
Ainsi,

$$\begin{aligned} 30p - 45 &= -15p + 855 \\ 45p &= 900 \\ p &= 20 \end{aligned}$$

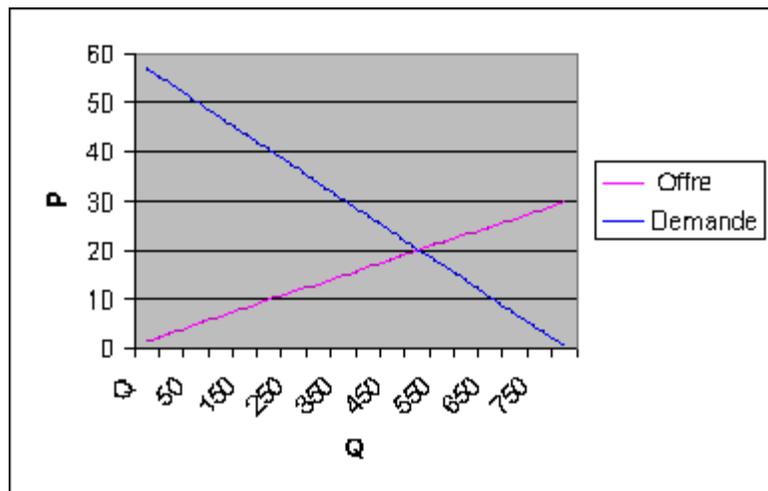
et

$$q = 30(20) - 45 = 555$$

Le prix et la quantité d'équilibre sont donc 20\$ et 555.



En économie, il est d'usage de représenter graphiquement les courbes d'offre et de demande en plaçant le prix (p) en ordonnée et la quantité (q) en abscisse.



3.2. Problèmes d'élasticité

Un problème d'offre ou de demande est parfois posé en présentant comme information initiale le prix et la quantité d'équilibre ainsi que l'élasticité-prix. Cette dernière composante mesure l'effet d'une variation de prix sur l'offre ou la demande. Il s'agit de se rappeler que l'élasticité-prix est définie par la relation

$$\varepsilon_p = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$$

où les paramètres représentés sont

p : prix

q : quantité

$\frac{dq}{dp}$: dérivée de l'équation de la quantité en fonction du prix

Dans le cas où le prix et la quantité d'un produit dépendent l'une de l'autre de façon linéaire, nous pouvons utiliser, au lieu de la dérivée, la variation moyenne, c'est-à-dire

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q}$$

Si effectivement le prix et la quantité d'un produit dépendent l'une de l'autre de façon linéaire, alors la fonction d'offre ou de demande aura la forme

$$q = mp + b$$

où m est la pente de la droite et est obtenue par

$$m = \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

Notez que sans connaître deux points de la droite, nous pouvons quand même évaluer la pente si le coefficient d'élasticité-prix est donné.

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} \rightarrow \varepsilon_p \cdot \frac{q}{p} = \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

$$m = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \varepsilon_p \cdot \frac{q}{p}$$

Pour ce qui est de la valeur de l'ordonnée à l'origine, **b**, elle est obtenue en utilisant toute autre information dévoilée dans l'énoncé du problème.

Exemple

Trouver la fonction d'offre si l'élasticité-prix est 0.5 et que le prix et la quantité d'équilibre sont de 500\$ et de 200 unités respectivement. Nous faisons l'hypothèse que la quantité dépend du prix de façon linéaire.

Solution :

Il nous faut, pour obtenir l'équation de la droite, trouver la pente. Ceci est possible grâce à la relation que nous avons établie plus haut entre la pente et l'élasticité :

$$m = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \varepsilon_p \cdot \frac{q}{p}$$

$$m = 0,5 \cdot \frac{200}{500} = 0,5 \times 0,4$$

$$m = 0,2$$

Il ne nous reste qu'à trouver la valeur de **b**. L'équation de l'offre est $q = mp + b = 0,2p + b$. Nous savons de plus que le point (500\$, 200) se trouve sur cette droite et doit donc satisfaire son équation :

$$200 = 0,2(500) + b \Rightarrow 200 = 100 + b \rightarrow b = 100$$

L'équation de la droite d'offre est donc $q = 0,2p + 100$.

4. Exercices

Problème 1 :

Une compagnie produit des chaussures. Lorsque 30 chaussures sont produites, le coût total de production est de 325\$. Lorsque 50 chaussures sont produites, le coût s'élève alors à 485\$. Quelle est l'équation du coût (C) si celui-ci varie de façon linéaire (droite) en fonction du nombre de chaussures produites (q) ?

Solution : $C = 8q + 85$

Problème 2 :

Considérons un marché caractérisé par les courbes d'offre et de demande suivantes :

$$\begin{aligned}q_{demande} &= -10p + 1000 \\q_{offre} &= 0,2p + 298,6\end{aligned}$$

Trouver le prix et la quantité d'équilibre.

Solution : 68,76\$ et 312,35

Problème 3 :

Trouver la fonction de demande si l'élasticité-prix est -0.2 et que le prix et la quantité d'équilibre sont de 100\$ et de 2500 unités respectivement, en supposant que la quantité dépend du prix de façon linéaire.

Solution : $q = -5p + 3000$