LA DÉRIVÉE

Sommaire

Le concept de pente est habituellement aux droites. Nous pouvons d'ailleurs définir une droite comme une fonction pour laquelle la pente est constante. En d'autres mots, quel que soit le point où l'on regarde, l'inclinaison de la droite reste la même. Lorsqu'une fonction n'est pas linéaire, sa pente peut varier d'un point à l'autre. Il nous faut donc introduire la notion de dérivée qui permet d'obtenir la pente en tout point de ces fonctions non linéaires.

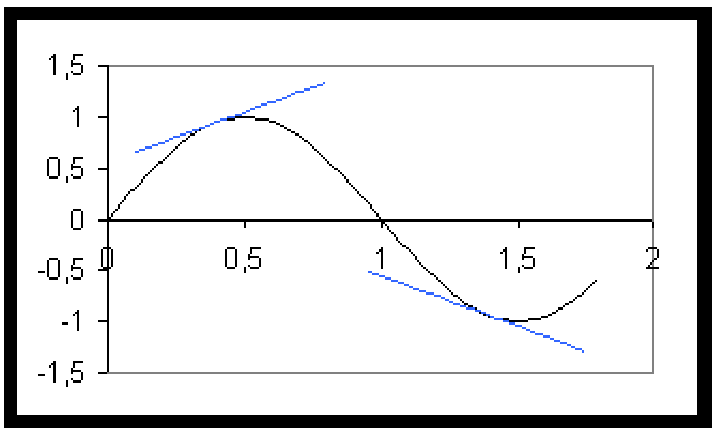
Définition

La dérivée d'une fonction f en un point x, notée $f\,'(x)$, est donnée par:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

si cette limite existe.

Graphiquement, la dérivée d'une fonction correspond à **la pente de sa droite tangente en un point spécifique**. L'illustration qui suit permet de visualiser la droite tangente (en bleu) d'une fonction quelconque en deux points distincts. Remarquez que l'inclinaison de la droite tangente varie d'un point à l'autre. La valeur de la dérivée d'une fonction dépend donc du point où nous décidons de l'évaluer. Par abus de langage, on parle souvent de la pente de la fonction plutôt que de la pente de sa droite tangente.



Notation

Nous représentons ici la dérivée d'une fonction par un symbole primé. Par exemple, écrire $f'(x)$ représente la dérivée de la fonction f évaluée au point x. De même, écrire $(3x\ +\ 2)'$ indique que l'on effectue la dérivée de la fonction $3x\ +\ 2$. Le symbole primé disparaît dès que la dérivée est effectuée.

1. Dérivée des fonctions usuelles

Nous présentons ci-dessous la liste de dérivées les plus importantes. Quoique ces formules puissent être démontrées formellement, nous ne ferons que les énoncer. Nous vous recommandons de les apprendre par cœur.

1.1. Fonction constante

Soit $f(x) = k$, où k est une constante réelle quelconque. Alors

$$f'(x) = (k)' = 0$$

Exemples

$(8)' = 0$

$(-5)' = 0$

$(0{,}2321)' = 0$

1.2. Fonction identité $f(x) = x$

Soit $f(x) = x$, la fonction identité de x. Alors

$$f'(x) = (x)' = 1$$

1.3. Fonction de forme x^n

Soit $f(x) = x^n$, une fonction de x, et n une constante réelle.
Alors

$$f'(x) = (x^n)' = n\,x^{n-1}$$

Exemples

$(x^4)' = 4\,x^{4-1} = 4\,x^3$

$(x^{1/2})' = 1/2\,x^{\frac{1}{2}-1} = 1/2\,x^{-1/2}$

$(\boldsymbol{x}^{-2})' = -2\boldsymbol{x}^{-2-1} = -2\,\boldsymbol{x}^{-3}$

$\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = \left(-\frac{1}{3}\right)\boldsymbol{x}^{-\frac{1}{3}-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)\boldsymbol{x}^{-\frac{4}{3}}$

Remarques sur la règle $(\boldsymbol{x^n})' = \boldsymbol{n\, x^{n-1}}$:

- La règle présentée ci-dessus s'applique à tout type d'exposant (naturel, entier, fractionnaire). Il importe cependant que cet exposant soit constant. Une autre règle devra être étudiée pour les fonctions exponentielles (du type $\boldsymbol{a^x}$).
- La fonction identité n'est qu'un cas particulier des fonctions de forme $\boldsymbol{x^n}$ (avec n = 1) et suit la même règle de dérivation : $(x)' = (\boldsymbol{x^1})' = 1\, x^{1-1} = 1\, x^0 = 1$
- Il arrive souvent qu'une fonction satisfasse cette forme mais nécessite un peu de réécriture avant de procéder à la dérivée. C'est le cas, notamment, des racines (carrées, cubiques, etc.) qui représentent des exposants fractionnaires.

Exemples

$\sqrt{x} = x^{1/2} \rightarrow \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\, x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} = \frac{1}{2} x^{-1/2}$

$\sqrt[3]{x} = x^{1/3} \quad \rightarrow (\sqrt[3]{x})' = (x^{1/3})' = \frac{1}{3}\, x^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \frac{1}{3} x^{-2/3}$

- Il faut se méfier des fonctions rationnelles. Par exemple, la fonction $\frac{1}{x^4}$ ne peut être dérivée de la même façon que la fonction x^4. Il faut d'abord réécrire la fonction de sorte que le "x" soit au numérateur, ce qui nous impose de changer le signe de son exposant.

  Exemples

$\frac{1}{x^4} = x^{-4} \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{1}{x^4}\right)' = (x^{-4})' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

$\frac{1}{x^{3/2}} = x^{-3/2} \quad \rightarrow \qquad (\frac{1}{x^{3/2}})' = (x^{-\frac{3}{2}})' = -\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2x^{\frac{5}{2}}}$

- Finalement, une dérivée peut grandement être simplifiée en procédant d'abord, si possible, à une simplification algébrique.

  Exemple

$$\frac{x^2}{x^3\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x^3 x^{1/2}} = x^{2-3-1/2} = x^{-3/2}$$

Ainsi, la dérivée de $\frac{x^2}{x^3\sqrt{x}}$ est grandement facilitée en effectuant plutôt la dérivée de $x^{-3/2}$.

$$\left(\frac{x^2}{x^3\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}}$$

1.4. Fonction exponentielle (de forme $\boldsymbol{a^x}$ avec $\boldsymbol{a} > 0$):

Il est extrêmement facile de confondre la fonction exponentielle a^xavec une fonction de forme x^n puisque toutes deux possèdent des exposants. Elles sont cependant bien différentes. En effet, dans une fonction exponentielle l'exposant est variable.

Soit la fonction exponentielle $f(x) = a^x$ où $a > 0$.
Alors,

$$f'(x) = (a^x)' = a^x ln(a)$$

Exemples

$(3^x)' = 3^x\, ln(3)$

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)' = \left(\frac{1}{2}\right)^x ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

1.5. Fonction $\boldsymbol{e^x}$

Soit la fonction $f(x) = e^x$. Alors,

$$f'(x) = (e^x)' = e^x$$

Il s'agit en fait d'un cas particulier de la règle précédente puisque la fonction $f(x) = \boldsymbol{e^x}$ est une fonction exponentielle avec $a = e$.

Ainsi, $f'(x) = (\boldsymbol{e^x})' = \boldsymbol{e^x} ln(e) = \boldsymbol{e^x}(1) = \boldsymbol{e^x}$

1.6. Fonction logarithmique $\boldsymbol{ln\ x}$

Soit la fonction logarithmique $f(x) = ln\, x$. Alors,

$$f'(x) = (ln\, x)' = \frac{1}{x}$$

2. Règles de dérivation de base

En général, nous serons confrontés non seulement aux fonctions présentées ci-dessus mais à combinaison de celles-ci : multiples, sommes, produits, quotients et compositions de fonctions. Il nous faut donc présenter les règles permettant de dériver ces cas plus complexes.

2.1. Multiple constant

Soit k, une constante réelle et $f(x)$, une fonction quelconque. Alors

$$(k\,f(x))' = k\,f'(x)$$

En d'autres mots, nous pouvons faire abstraction de la constante, qui restera inchangée, et dériver uniquement la fonction de x.

Exemples

$(4x^2)' = 4(x^2)' = 4(2x) = 8x$

$(-5e^x)' = -5(e^x) = -5e^x$

$(12lnx)' = 12(lnx)' = 12\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{12}{x}$

2.2. Somme et différence de fonctions

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions. Alors,

$$\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$$

Lorsque nous dérivons une somme ou une différence de deux fonctions, la règle précédente indique que les fonctions peuvent être dérivées individuellement sans changer l'opération qui les relie.

Exemple 1

$(e^x + x^5)' = (e^x)' + (x^5)' = e^x + 5x^4$

Exemple 2

$$\left(lnx - \frac{1}{x^2} + 8\right)' = (lnx)' - (x^{-2})' + (8)'$$

$$= \frac{1}{x} - (-2x^{-3}) + 0$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}$$

Exemple 3

$$\left(3\sqrt{x} + 2x - \frac{8}{x}\right)' = \left(3x^{1/2}\right)' + (2x)' - (8x^{-1})'$$

$$= 3\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + 2(x)' - 8(x^{-1})'$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) + 2(1) - 8(-x^{-2})$$

$$= \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2 + 8x^{-2}$$

2.3. Règle du produit de fonctions

Soients $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions. Alors, la dérivée du produit

$$(f(x)\ g(x)\ )' = f'(x)\ g(x) + f(x)\ g'(x)$$

Il faut suivre cette règle religieusement et ne pas succomber à la tentation d'écrire $(f(x)\ g(x)\ )' = f'(x)\ g'(x)$ qui est une expression erronée.

Exemple 1

$$(x^3 e^x)' = (x^3)' e^x + x^3 (e^x)'$$

$$= 3x^2 e^x + x^3 e^x$$

Exemple 2

$(3\sqrt{x}lnx)' = (3\sqrt{x})'lnx + 3\sqrt{x}(lnx)'$

$= 3\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' lnx + 3\sqrt{x}(lnx)'$

$= 3\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\right) lnx + 3\sqrt{x}\frac{1}{x}$

$= \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}lnx + 3x^{-\frac{1}{2}}$

2.4. Règle du quotient de fonctions

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions. Alors, la dérivée du quotient

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Comme la règle du produit, celle du quotient doit être religieusement respectée

Exemple 1

$\left(\frac{x^3}{e^x}\right)' = \frac{(x^3)'e^x - x^3(e^x)'}{(e^x)^2}$

$= \frac{3x^2e^x - x^3e^x}{(e^x)^2}$

$= \frac{x^2e^x(3-x)}{(e^x)^2}$

$= \frac{x^2(3-x)}{e^x}$

Exemple 2

$\left(\frac{3\sqrt{x}}{lnx}\right)' = \frac{\left(3\sqrt{x}\right)' lnx - 3\sqrt{x}(lnx)'}{(lnx)^2} = \frac{3\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' lnx - 3\sqrt{x}(lnx)'}{(lnx)^2}$

$= \frac{3\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\right)lnx - 3\sqrt{x}\frac{1}{x}}{(lnx)^2} = \frac{3x^{-\frac{1}{2}}lnx - 6x^{-\frac{1}{2}}}{2(lnx)^2}$

$= \frac{3x^{-\frac{1}{2}}(lnx-2)}{2(lnx)^2}$

3. Dérivée de fonctions composées

Une fonction composée est une fonction de la forme $f(g(x))$.

Comment reconnaître une fonction composée ?

Une fonction composée est en fait une fonction qui en contient une autre. Si vous êtes en présence d'une fonction qui peut être décomposée en plusieurs parties, que chacune de ces parties est elle-même une fonction et que ces parties ne sont pas reliées par une addition, une soustraction, un produit ou une division, c'est qu'il s'agit habituellement d'une fonction composée.

Par exemple, la fonction $f(x) = e^{x^3}$ est une fonction composée. On peut l'écrire sous la forme $f(g(x))$ où $g(x) = x^3$.

Contrairement, la fonction *f(x)* = x^3e^x n'est pas une fonction composée. Il s'agit simplement d'un produit de fonctions.

Voici quelques exemples de fonctions composées :

- $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$

  On peut écrire cette fonction sous la forme $f(g(x)) = ln\,(g(x))$ où $g(x) = x^2 + 2x + 1$

- $f(x) = e^{\,3x-5}$

  On peut écrire cette fonction sous la forme $f(g(x)) = e^{g(x)}$où $g(x) = 3x - 5$

- $f(x) = (ln(x) + 3x - e^x)^4$

  On peut écrire cette fonction sous la forme $f(g(x)) = (g(x))^4$où $g(x) = ln(x) + 3x - e^x$

3.1. Règle de la dérivée en chaîne

Soient f et g, deux fonctions. Alors, la dérivée de la fonction composée $f(g(x))$ est

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$$

ou encore $(f(u))' = f'(u)\,u'$, où $u = g(x)$

La règle de la dérivée en chaîne indique que lorsque nous dérivons une fonction composée, il faut d'abord dériver la fonction externe (celle qui contient toutes les autres) en conservant la fonction interne telle quelle, et la multiplier par la dérivée de la fonction interne. Si celle-ci est elle-même composée, ce processus est répété. Soyez alertes car la fonction interne pourrait aussi être un produit, un quotient, …!

3.2. Dérivée en chaîne des fonctions usuelles

Concrètement, nous pouvons exprimer la règle de dérivée en chaîne pour les fonctions principales de la façon suivante :

Si $u = g(x)$ représente une fonction de *x* quelconque

- $(u^n)' = n\, u^{n-1}u'$
- $(a^u)' = a^u \, ln(a)u'$
- $(e^u)' = e^u u'$
- $(ln\, u)' = \frac{1}{u} \times u'$

Exemples

$$[\ln(x^2 + 2x + 1)]' = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}(x^2 + 2x + 1)'$$

$$= \frac{1}{x^2+2x+1}(2x + 2)$$

$$= \frac{2x+2}{x^2+2x+1}$$

$$[(lnx + 3x - e^x)^4]' = 4(lnx + 3x - e^x)^3(lnx + 3x - e^x)'$$

$$= 4(lnx + 3x - e^x)^3(\frac{1}{x} + 3 - e^x)$$

$$(e^{\,3x-5})' = e^{\,3x-5}(3x - 5)'$$

$$= e^{\,3x-5}.3$$

Voici des exemples supplémentaires qui montrent que plusieurs règles peuvent être nécessaires lors d'une seule et même dérivée

Exemple 1

$$([\ln(3x^3-9e^x]^3)' = 3[\ln(3x^3-9e^x)]^2.[\ln(3x^3-9e^x)]'$$

$$= 3[\ln(3x^3-9e^x)]^2.\frac{1}{3x^3-9e^x}.(3x^3-9e^x)'$$

$$= 3[\ln(3x^3-9e^x)]^2.\frac{1}{3x^3-9e^x}.(9x^2-9e^x)$$

Exemple 2

$$[e^{xlnx}]' = e^{xlnx}.(xlnx)'$$

$$= e^{xlnx}[(x)'lnx + x(lnx)'] \qquad \text{(règle du produit)}$$

$$= e^{xlnx}\left(1.lnx + x.\frac{1}{x}\right)$$

$$= e^{xlnx}(lnx+1)$$

Exemple 3

$$\left[\frac{x^2+1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}\right]' = \frac{(x^2+1)'.(2x+1)^{\frac{1}{2}}-(x^2+1).\left[(2x+1)^{\frac{1}{2}}\right]'}{\left[(2x+1)^{\frac{1}{2}}\right]^2} \qquad \text{(règle du quotient)}$$

$$= \frac{2x.(2x+1)^{\frac{1}{2}}-(x^2+1).\left[(2x+1)^{\frac{1}{2}}\right]'}{2x+1}$$

$$= \frac{2x.(2x+1)^{\frac{1}{2}}-(x^2+1).\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}.(2x+1)'}{2x+1}$$

$$= \frac{2x.(2x+1)^{\frac{1}{2}}-(x^2+1).\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}.2}{2x+1}$$

$$= \frac{2x.(2x+1)^{\frac{1}{2}}-(x^2+1).(2x+1)^{-\frac{1}{2}}}{2x+1}$$

4. Évaluation de la pente de la tangente en un point

Comme nous le mentionnions au tout début, la dérivée $f'(x)$ représente la pente de la droite tangente à $f(x)$ en tout point x. Il nous faudra souvent évaluer cette pente en un point précis.

Pour évaluer la pente de la tangente de la fonction $f(x)$ au point $x = 1$, par exemple, il ne faut surtout pas calculer $f(1)$ et de dériver cette valeur… nous obtiendrions alors une pente de 0 puisque $f(1)$ est une constante. Il faudra plutôt trouver la dérivée $f'(x)$ en tout point, et ensuite évaluer celle-ci en $x = 1$. Nous utiliserons la notation $f'(a)$ afin de représenter la dérivée de la fonction f évaluée au point $x = a$.

Exemple

Évaluer la pente de la fonction $f(x) = x^3e^x$ au point $x = 0$.

Nous cherchons à calculer $f'(0)$. Il faut d'abord trouver la dérivée en tout point, $f'(x)$. Or, nous avons montré plus tôt que $f'(x) = (x^3e^x)' = 3x^2e^x + x^3e^x$

Évaluée en $x = 0$, nous obtenons $f'(0) = 3.0^2e^0 + 0^3e^0 = 0$. La pente de la fonction $f(x) = x^3e^x$est donc nulle en $x = 0$. Nous vous laissons vérifier que ce n'est pas le cas au point $x = 1$.

5. Croissance et décroissance

Il existe une relation directe entre la croissance ou la décroissance d'une fonction et la valeur de sa dérivée en un point.

- Si la valeur de la dérivée est négative en un point, cela indique que la fonction est décroissante en ce point.
- Si la valeur de la dérivée est positive en un point, cela indique que la fonction est croissante en ce point.

Exemple

- Trouver la dérivée de la fonction $f(x) = (x^2 - 4)^3$.
- Quelle est la pente de la tangente de $f(x)$ au point $x = 1$?
- La fonction $f(x)$ est-elle croissante ou décroissante au point $x = 1$?
- Trouver tous les points où la pente de $f(x)$ est nulle.

Solution

- Nous avons à dériver la fonction composée u^3, où $u = x^2 - 4$. Conséquemment, il faudra se servir de la dérivée en chaîne.

  $f'(x) = [(x^2 - 4)^3]'$

  $= 3(x^2 - 4)^2 . (x^2 - 4)'$

  $= 3(x^2 - 4)^2 . 2x$

  $= 6x(x^2 - 4)^2$

- Au point $x = 1$, la pente de la tangente de la fonction f est

  $f'(1) = 6(1)(1^2 - 4)^2 = 6(1)(-3)^2 = 54$

- Puisque la pente est positive en $x = 1$, la fonction $f(x)$ est croissante en ce point.

- La pente est nulle aux points tels que $f'(x) = 0$. Nous cherchons donc à trouver les valeurs de *x* telles que

  $6x(x^2 - 4)^2 = 0$

  $x = 0$, $x = -2$ et $x = 2$ sont les valeurs recherchées.