LA MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

Sommaire

1. Concept de variable

On appelle "variable" toute expression algébrique (habituellement une seule lettre : , $y, z, \ldots$) par laquelle est remplacée une valeur (physique, économique, temporelle, etc.) inconnue.

Le rôle de la variable est donc d'occuper la position que prendrait une valeur si celle-ci était disponible.

***Exemple*:**

Considérant que le taux d'imposition est de 40 %, quel montant d'impôt un individu devrait-il payer?

Solution:

Répondre à une telle question nécessite la connaissance du salaire annuel de l'individu. Puisque le salaire est inconnu, nous le remplaçons par une variable. Par exemple, si on définit la variable

$x =$ le salaire annuel de l'individu

alors celui-ci aurait à payer 40 % de x en impôt, c'est-à-dire

$$Impôt \;=\; 40\,\%\,x \;=\; 0{,}40\,x$$

La variable x occupe donc la position du salaire – en attendant que celui-ci soit découvert – dans la formule du calcul d'impôt.

2. Modélisation mathématique

Le procédé par lequel nous utilisons des expressions mathématiques pour décrire une situation quantitative réelle s'appelle la modélisation. Modéliser consiste à écrire en notation mathématique ce qui est exprimé d'abord en mots en faisant intervenir des variables au besoin. L'exemple qui précède illustre d'ailleurs une modélisation : à défaut d'avoir le salaire de l'individu, nous avons tout de même pu obtenir une expression qui représente adéquatement l'impôt payé par celui-ci.

***Exemple 1*:**

Marc souhaite investir dans une action qui lui rapportera 10 % annuellement. Quel montant aura-t-il au bout de l'année ?

Solution:

L'investissement initial de Marc est inconnu. Définissons

x : le montant que Marc investit dans cette action

Le montant accumulé à la fin de l'année sera

$$x + (10\,\%)\,x = x + 0{,}1\,x = 1{,}1\,x.$$

Exemple 2:

Un ébéniste produit et vend ses propres meubles. Les tables en pin sont vendues 650 $, les tables en merisier se vendent 750 $ et les tables en érable, 850 $. Quel sera le revenu annuel de l'ébéniste ?

Solution:

Le revenu annuel de l'ébéniste ne peut être obtenu que si le nombre de tables vendues de chaque type est connu. Des variables doivent donc remplacer ces quantités, toutes inconnues pour l'instant. Définissons :

x : le nombre de tables en pin vendues au cours de l'année
y : le nombre de tables en merisier vendues au cours de l'année
z : le nombre de tables en érable vendues au cours de l'année

Chaque table en pin produit un revenu de 650 $. Si x tables de pin sont vendues, un revenu de 650 fois x sera obtenu. Le même argument se répète aux autres types de tables. Par conséquent,

$$Revenu\ total\ =\ 650\,x\ +\ 750\,y\ +850\,z$$

Exemple 3:

Les trois phases d'un projet doivent s'effectuer de façon séquentielle, ce qui signifie qu'une phase ne peut pas débuter avant que la phase précédente soit terminée. On sait que le coût de réalisation de chacune des phases se décompose en un coût fixe, indépendant de sa durée, et en un coût variable qui en dépend. Le tableau suivant résume la situation:

PHASE	**1**	**2**	**3**
COÛT FIXE	318 000 $	212 000 $	220 000 $
COÛT VARIABLE	15 000 $ / jour	14 000 $ / jour	16 000 $ / jour

Le concepteur du projet doit proposer un prix pour le projet. Il voudrait que ce prix lui assure une marge de profit d'au moins 10 %. Exprimer le coût total du projet et le prix que le concepteur devrait proposer en fonction de la durée de chaque phase du projet?

Solution:

La durée de chaque phase étant inconnue, définissons les trois variables suivantes:

$x = durée\ de\ la\ phase\ 1\ (en\ jours)$
$y = durée\ de\ la\ phase\ 2\ (en\ jours)$
$z = durée\ de\ la\ phase\ 3\ (en\ jours)$

Le coût de la phase 1 se décompose en un coût fixe (318 000 $) et un coût variable (15 000 $ par jour).
Si la phase 1 dure x jours, le coût de cette phase sera

$$Coût_{phase1} =\ 318\,000\ +\ 15\,000\ x.$$

Le même principe s'applique pour les deux autres phases.
Le coût total du projet peut s'exprimer comme la somme des coûts des trois phases:

$$\begin{aligned} C_T = Coût\ total\ du\ projet =&\ Coût_{phase1} + Coût_{phase2} + Coût_{phase3} \\ =&\ (318\,000\ +\ 15\,000\,x) + (212\,000\ +\ 14\,000\,y) + (220\,000\ +\ 16\,000\,z \\ =&\ 15\,000\,x\ +\ 14\,000\,y\ +\ 17\,600\,z\ +\ 750\,000 \end{aligned}$$

Le prix proposé pour le projet par son concepteur doit lui assurer une marge de profit d'au moins 10%.

Le prix doit donc être au moins 10% plus élevé que le coût total :

$$Prix \geq C_T + 10\%C_T = 1.1C_T = 1.1(15\,000x + 14\,000y + 16\,000z + 750\,000)$$
$$Prix \geq 16\,500x + 15\,400y + 16\,000z + 825\,000$$

Exemple 4:

Une boîte à fond carré et sans couvercle est fabriquée à partir d'un matériau coûtant 0,75$ le mètre carré pour les côtés et 0,95$ le mètre carré pour le fond. Exprimer le coût total de la matière première nécessaire pour construire la boîte en fonction du côté et de sa hauteur.

Solution:

Pour calculer le coût de la matière première nécessaire, nous devons établir la surface (en mètres carrés) de chaque côté de la boîte et de son fond. Les dimensions de la boîte sont pour l'instant inconnues.

Définissons:

$$x = longueur\ du\ côté\ du\ fond\ de\ la\ boîte\ (en\ mètres)$$

$$h = hauteur\ de\ la\ boîte\ (en\ mètres)$$

Les quatre côtés de la boîte ont une superficie de xh mètres carrés chacun. Chaque côté coûte donc $0{,}75\ xh$ en matière première.

Le fond de la boîte a une superficie de $x \times x = x^2$ mètres carrés. Le coût de la matière première pour le fond est $0{,}95x^2$. Ainsi, le coût total de la matière première pour construire la boîte est donné par:

$$Coût\ total = 0{,}95\ x^2 + 4(0{,}75\ xh) = 0{,}95\ x^2 + 3\ xh$$

Il existe des problèmes qui font intervenir des contraintes entre les différentes variables. Reprenons le contexte de l'exemple 2. Ici, les valeurs de x, y et z sont parfaitement libres. Toutefois, une pénurie de bois d'érable aurait pu obliger l'ébéniste à produire deux fois moins de tables en érable que de tables en merisier. Cette contrainte peut également se modéliser en notation mathématique par l'expression $z = (1/2)\ y$ ou encore $y = 2\ x$.

Lorsqu'un problème est modélisé, il importe de tenir compte de toutes les informations données. Ainsi, toutes les grandeurs (physiques, économiques, temporelles) et toutes les contraintes doivent subir une traduction en langage mathématique.

Exemple 5 :

Un cultivateur cherche à diviser ses terres afin d'exploiter différentes cultures. Traditionnellement, les champs de maïs rapportent 3,50 $ le mètre carré. Les champs d'avoine rapportent 2,75 $ le mètre carré. Les vergers produisent des revenus de 4,50 $ le mètre carré. L'homme dispose d'une terre de 1 million de mètres carrés. Afin de nourrir les animaux de sa ferme, le cultivateur doit consacrer un minimum de 300 000 mètres carrés à la culture du maïs et de l'avoine (ensemble). Toutefois, le maïs étant plus susceptible aux longues périodes de sécheresse, il ne veut pas que cette culture occupe plus de 200 000 mètres carrés. Dernièrement, il aimerait accorder le même espace à la culture de l'avoine qu'à ses vergers.

Quelle expression représenterait correctement les revenus du cultivateur ? Modéliser toutes les contraintes que le cultivateur doit respecter.

Solution

Trois inconnues doivent être identifiées afin de modéliser complètement ce problème :

x : *la surface vouée à la culture du maïs* (m^2)

y : *la surface vouée à la culture de l'avoine* (m^2)

z : *la surface vouée à la culture de la pomme* (m^2)

Les revenus sont exprimés en fonction de la surface occupée par chacune des cultures et du revenu que celles-ci lui procurent par mètre carré

$$Revenus\ =\ 3{,}50\,x\ +\ 2{,}75\,y\ +\ 4{,}50\,z$$

Quatre contraintes sont imposées au cultivateur :

1. "L'homme dispose d'une terre de 1 million de mètres carrés"

$$x + y + z \leq 1\,000\,000$$

2. "le cultivateur doit consacrer un minimum de 300 000 mètres carrés à la culture du maïs et de l'avoine"

$$x + y \geq 300\,000$$

3. "le maïs étant plus susceptible aux longues périodes de sécheresse, il ne veut pas que cette culture occupe plus de 200 000 mètres carrés"

$$x \leq 200\,000$$

4. "il aimerait accorder le même espace à la culture de l'avoine qu'à ses vergers"

$$y = z$$