LE SYMBOLE DE SOMMATION

Sommaire

1. Somme simple 1

2. Double somme 5

3. Double indice 5

1. Somme simple

Le symbole Σ (sigma) s'utilise pour désigner de manière générale la somme de plusieurs termes. Ce symbole est généralement accompagné d'un indice que l'on fait varier de façon à englober tous les termes qui doivent être considérés dans la somme.

Par exemple, la somme des n premiers entiers peut être représentée de la façon suivante:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots . + n$$

De manière plus générale, l'expression

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ représente la somme de n termes $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots . + x_n$.

Exemple 1

Soit $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 6, x_4 = 2 \; et \; x_5 = 7$.

Évaluer $\sum_{i=1}^{5} x_i$ et $\sum_{i=2}^{4} x_i$.

Solution:

Dans la première somme, l'indice " *i* " varie de 1 à 5. On doit donc inclure les 5 termes dans la somme.

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 + 5 + 6 + 2 + 7 = 23$$

Dans le deuxième cas, l'indice " *i* "varie de 2 à 4. Seuls les termes x_2, x_3 et x_4 doivent donc être considérés.

$$\sum_{i=2}^{4} x_i = x_2 + x_3 + x_4 = 5 + 6 + 2 = 13$$

Lorsqu'on utilise le symbole de sommation, il est utile de retenir les règles suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Exemple 2

Soit $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 6, x_4 = 2 \ et \ x_5 = 7$ et $y_1 = 2, y_2 = 8, y_3 = 3,$

$y_4 = 1 \ et \ y_5 = 6.$

Vérifier les trois règles précédentes avec les sommes suivantes :

$a) \sum_{i=1}^{5} 4x_i$

$b) \sum_{i=1}^{5} 4$

$c) \sum_{i=1}^{5} (x_i + y_i)$

Solution :

$$a)\ \sum_{i=1}^{5} 4x_i = 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 4 \times 3 + 4 \times 5 + 4 \times 6 + 4 \times 2 + 4 \times 7$$
$$= 92$$

et

$$4\sum_{i=1}^{5} x_i = 4 \times (3 + 5 + 6 + 2 + 7) = 4 \times 23 = 92$$

b)

$$\sum_{i=1}^{5} 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \times 4 = 20$$

c)

$$\sum_{i=1}^{5} (x_i + y_i) = (3 + 2) + (5 + 8) + (6 + 3) + (2 + 1) + (7 + 6) = 43$$

Et

$$\sum_{i=1}^{5} x_i + \sum_{i=1}^{5} y_i = (3 + 5 + \cdots 7) + (2 + 8 + \cdots + 6) = 23 + 20 = 43$$

Attention **:**

On ne doit pas confondre l'expression

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

avec

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

pas plus que l'expression

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Avec

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

Exemple 3

Soit $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 6, x_4 = 2\ et\ x_5 = 7$ et $y_1 = 2, y_2 = 8, y_3 = 3,$

$y_4 = 1\ et\ y_5 = 6.$

a)

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 3^2 + 5^2 + 6^2 + 2^2 + 7^2 = 123$$

et

$$\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2 = (3 + 5 + 6 + 2 + 7)^2 = 23^2 = 52 \neq 123$$

b)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} x_i y_i &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5 = (3 \times 2) + (5 \times 8) + \cdots + (7 \times 6) \\ &= 6 + 40 + \cdots + 42 = 108\end{aligned}$$

et

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = (3 + 5 + \cdots + 7) \times (2 + 8 + \cdots + 6) = 23 \times 20 = 460 \neq 108$$

2. Double somme

Dans certaines situations, l'utilisation d'une double somme s'avère nécessaire. Il s'agit alors d'appliquer successivement la définition.

Exemple

Soit $x_1 = \ 3, x_2 = \ 5, x_3 = \ 1 \ et \ y_1 = \ 2, y_2 = \ 4$

Nous utiliserons l'indice *i* pour les termes de x et l'indice *j* pour les termes de y

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_i y_j = \sum_{=1}^{3}(x_i y_1 + x_i y_2) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_{2i} y_2 + x_3 y_1 + x_3 y_2$$
$$= (3 \times 2) + (3 \times 4) + (5 \times 2) + (5 \times 4) + (1 \times 2) + (1 \times 4) = 54$$

3. Double indice

Pour représenter de manière générale les données d'un tableau ou d'une matrice, on utilise souvent une notation à double indice, du genre x_{ij} ou le premier indice (*i*) correspond au numéro de la ligne où se situe la donnée et le deuxième (*j*) à celui de la colonne. Par exemple, le terme x_{24} représente la donnée qui si situe à l'intersection de la 2$^{\text{ième}}$ ligne et de la 4$^{\text{ième}}$ colonne du tableau ou de la matrice.

Exemple

Soit

$$x_{11} = 4 \ \ x_{12} = 4 \ \ x_{13} = 1 \ \ x_{14} = 5$$

$$x_{21} = 0 \ \ x_{22} = 3 \ \ x_{23} = 1 \ \ x_{24} = 2$$

$$x_{31} = 1 \ \ x_{32} = 4 \ \ x_{33} = 2 \ \ x_{34} = 3$$

Pour effectuer la somme des termes d'une ligne, il faut fixer l'indice de cette ligne et faire varier, sur toutes les valeurs possibles, l'indice de la colonne. Par exemple:

$\sum_{j=1}^{4} x_{1j} = x_{11} + \ x_{12} + x_{13} + x_{14} = 2 + 4 + 1 + 5 = 12$ (somme de la première ligne)

$\sum_{j=1}^{4} x_{2j} = x_{21} + \ x_{22} + x_{23} + x_{24} = 0 + 3 + 1 + 2 = 6$ (somme de la 2$^{\text{ième}}$ ligne)

Pour effectuer la somme des termes d'une colonne, il faut fixer l'indice de cette colonne et faire varier, sur toutes les valeurs possibles, l'indice de la ligne.

Par exemple:

$\sum_{i=1}^{3} x_{i4} = x_{14} + \ x_{24} + x_{34} = 5 + 2 + 3 = 10$ (somme de la 4$^{\text{ième}}$ colonne)

Pour effectuer la somme de tous les termes du tableau, il faut faire varier les deux indices et utiliser une double somme :

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = \sum_{i=1}^{3}(x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4})$$
$$= x_{11} + \ x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{21} + \ x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{31} + \ x_{32} + x_{33} + x_{34} = 2 + 4 + 1 + 6 + 0 + 3 + \cdots + 3 = 28$$