Généralités sur les matrices

Sommaire

Matrice de dimension $m \times n$; $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

1. Matrices particulières

Matrice nulle :

tous ses éléments $\mathrm{a_{ij}} = 0$

Matrice carrée d'ordre n :

nombre de lignes = nombre de colonnes = n

Matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{a}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{a}_{\mathrm{mn}} \end{pmatrix}$$

Matrice identité d'ordre n :

$$\mathrm{I}_{\mathrm{n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \cdots & \mathrm{a}_{1\mathrm{n}} \\ 0 & \mathrm{a}_{22} & \cdots & \mathrm{a}_{2\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{a}_{\mathrm{mn}} \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{a}_{\mathrm{m}1} & \mathrm{a}_{\mathrm{m}2} & \cdots & \mathrm{a}_{\mathrm{mn}} \end{pmatrix}$$

2. Opérations sur les matrices

Multiplication par un scalaire k :

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Addition de deux matrices de <u>même dimension</u> $(m \times n)$ $A = (a_{ij})$ *et* $B = (b_{ij})$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{31} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplication de deux matrices A et B de dimensions respectives $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}$:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m1} & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mj} & & c_{mp} \end{pmatrix} = C\ (dimension\ m \times p)$$

avec

$$\mathrm{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{n1}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\ (i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, p)}$$

ATTENTION : Le produit AB n'est défini que si le nombre de colonnes de la matrice « A » est égal au nombre de lignes de la matrice « B ». De plus, de manière générale, $AB \neq BA$.

Transposition *(A^T ou $A^{'}$) :*

La transposée d'une matrice A s'obtient en remplaçant les lignes de la matrice par ses colonnes. Si la matrice A est de dimension $m \times n$, la transposée AT, sera de dimension $n \times m$.

$$\mathrm{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Propriétés : Soit A et B deux matrices et k un scalaire

1. $\mathrm{(A + B)^T = A^T + B^T}$
2. $\mathrm{(A^T)^T = A}$
3. $\mathrm{(kA)^T = kA^T}$
4. $\mathrm{(A\,B)^T = B^TA^T}$

Pour toute matrice A, le produit A^TA est une matrice carrée symétrique et les éléments de sa diagonale principale sont non négatifs.

Trace d'une matrice carrée d'ordre n, $A = (a_{ij})$ *(notée* $tr\,(A)$*) :*

Somme des éléments de la diagonale principale i.e. $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = \mathrm{a}_{11} + \mathrm{a}_{22} + \cdots + \mathrm{a}_{\mathrm{nn}}$

Propriétés :
1. $\mathrm{tr}(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \mathrm{tr}(\mathrm{A}) + \mathrm{tr}(\mathrm{B})$
2. $\mathrm{tr}\,(\mathrm{cA}) = \mathrm{c}\,\mathrm{tr}(\mathrm{A})$

3. Forme échelonnée d'une matrice

Une matrice $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{\mathrm{ij}})$ est dite « **échelonnée** » si le nombre de « 0 » précédent le premier élément non nul d'une ligne augmente de ligne en ligne.
Elle est appelée « **matrice échelonnée réduite** » si en plus, le premier élément non nul d'une ligne est égal à « 1 » et si ,dans la colonne correspondante (colonne pivot) , tous les autres éléments sont « 0 ».

On peut réduire une matrice à sa forme échelonnée (ou échelonnée réduite) en effectuant des opérations élémentaires sur ses lignes :
- Multiplier une ligne par un scalaire non nul.
- Intervertir ou permuter 2 lignes.
- Ajouter à une ligne « k » fois une autre ligne.

4. Rang d'une matrice $r(A)$

Le rang d'une matrice A de dimension $m \times n$ correspond au nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée réduite. On dit que A est de « plein rang » si $\mathrm{r}(\mathrm{A}) = \mathrm{m}$

Remarque : Le rang d'une matrice donne le nombre maximum de ses lignes linéairement indépendantes ainsi que le nb max de ses colonnes linéairement indépendantes.

Propriétés :
1. Si B peut être obtenue de A par applications successives d'opérations élémentaires sur ses lignes, alors $\mathrm{r}(\mathrm{A}) = \mathrm{r}(\mathrm{B})$
2. $\mathrm{r}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(\mathrm{A})$
3. Si le produit matriciel AB est défini, alors $\mathrm{r}(\mathrm{AB}) \leq \min\{\mathrm{r}(\mathrm{A}); \mathrm{r}(\mathrm{B})\}$

5. Matrice inverse

Soit A une matrice carrée $n \times n$. L'inverse de A (notée A^{-1}) , si elle existe, est la matrice qui satisfait

$$\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}_\mathrm{n}$$

Si l'inverse de A existe, on peut l'obtenir de la façon suivante :

1. Considérer la matrice augmentée
2. $(\mathrm{A} \vdots \mathrm{I}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
3. Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée jusqu'à ce qu'elle devienne $(\mathrm{I} \vdots \mathrm{B})$. La matrice B est alors l'inverse de A i.e. $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$.

Propriétés :
1. Si A est inversible, alors $A - 1$ est aussi inversible et $(\mathrm{A}^{-1})^{-1} = \mathrm{A}$.
2. Si A est inversible, alors $(\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$
3. Si A et B sont 2 matrices carrées inversibles de même dimension, alors leur produit AB est aussi inversible et $(\mathrm{A\,B})^{-1}$= $\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$

Existence : A de dimension $n \times n$ est inversible si $\mathrm{r(A)} = \mathrm{n}$

6. Déterminant ($\boldsymbol{det(A)}$ ou $|\boldsymbol{A}|$)

Soit A une matrice carrée $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$.

Matrice 2×2 : $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Ordre supérieur : Le déterminant est égal à la somme des produits obtenus en multipliant les éléments d'une ligne quelconque (ou d'une colonne) par leur cofacteurs respectifs cofacteur = $\mathrm{A}_{\mathrm{ij}} = (-1)^{\mathrm{i+j}}|\mathrm{M}_{\mathrm{ij}}|$ où M_{ij} (mineur) est la sous-matrice carrée $(\mathrm{n}-1) \times (\mathrm{n}-1)$ obtenue en supprimant la i$^{\text{ème}}$ ligne et la j$^{\text{ème}}$ colonne de A.

Ainsi $|\mathrm{A}| = a_{11}\mathrm{A}_{\mathrm{i1}} + a_{22}\mathrm{A}_{\mathrm{i2}} + \cdots + a_{\mathrm{nn}}\mathrm{A}_{\mathrm{in}}$.

Propriétés :

1. Si A possède une ligne (ou colonne) de « 0 », alors $|\mathrm{A}| = 0$.

2. Si A possède 2 lignes (colonnes) identiques, alors $|\mathrm{A}| = 0$.

3. Si A est triangulaire, alors $|A| =$ produit de ses éléments diagonaux. En particulier, $|\mathrm{I_n}| = 1$.

4. Si B est obtenue de A en multipliant une seule de ses lignes (colonnes) par un scalaire k, alors $|\mathrm{B}| = \mathrm{k}|\mathrm{A}|$.

5. Si B est obtenu en permutant 2 lignes (ou colonnes) de A, alors$|\mathrm{B}| = -|\mathrm{A}|$.

6. Si B est obtenu de A en additionnant le multiple d'une ligne (colonne) à une autre, alors $|\mathrm{B}| = |\mathrm{A}|$.

7. $|\mathrm{A^T}| = |\mathrm{A}|$

8. Si A et B sont 2 matrices carrées de même dimension, alors $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{A}||\mathrm{B}|$.

9. A est inversible si $|\mathrm{A}| \neq 0$. On dit que la matrice est non singulière.

7. Matrice adjointe

Soit A une matrice carrée d'ordre n. La matrice adjointe de A (notée adj A) est définie comme la transposée de la matrice des cofacteurs de A i.e.

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A_{11}} & \mathrm{A_{12}} & \cdots & \mathrm{A_{1n}} \\ \mathrm{A} & \mathrm{A_{22}} & \cdots & \mathrm{A_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{A_{m1}} & \mathrm{A_{m2}} & \cdots & \mathrm{A_{mn}} \end{pmatrix}$ où $\mathrm{A_{ij}} = (-1)^{\mathrm{i+j}}\left|\mathrm{M_{ij}}\right|$ (cofacteur – voir page précédente)

Si A est une matrice carrée telle que $|\mathrm{A}| \neq 0$, alors A est inversible et $\mathrm{A^{-1}} = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\mathrm{adj(A)}$.

8. Matrice définie positive

Une matrice $n \times n$ symétrique A est dite « définie positive » si pour tout vecteur $\mathrm{X}\ (\mathrm{n} \times 1)$, le produit $\mathrm{X^T A X} > 0$.
Elle est « semi-définie positive » si $\mathrm{X^T A X} \geq 0$ pour tout X.

Une matrice $n \times n$ symétrique A est dite « définie négative » si pour tout vecteur $\mathrm{X}\ (\mathrm{n} \times 1)$, le produit $\mathrm{X^T A X} < 0$.
Elle est « semi-définie négative » si $\mathrm{X^T A X} \leq 0$ pour tout X.

9. Système d'équations linéaires sous forme matricielle

Tout système d'équations linéaires (m équations, n inconnues) :

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{gathered}$$

peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ ou simplement } AX = B$$